

Grau en Matemàtiques

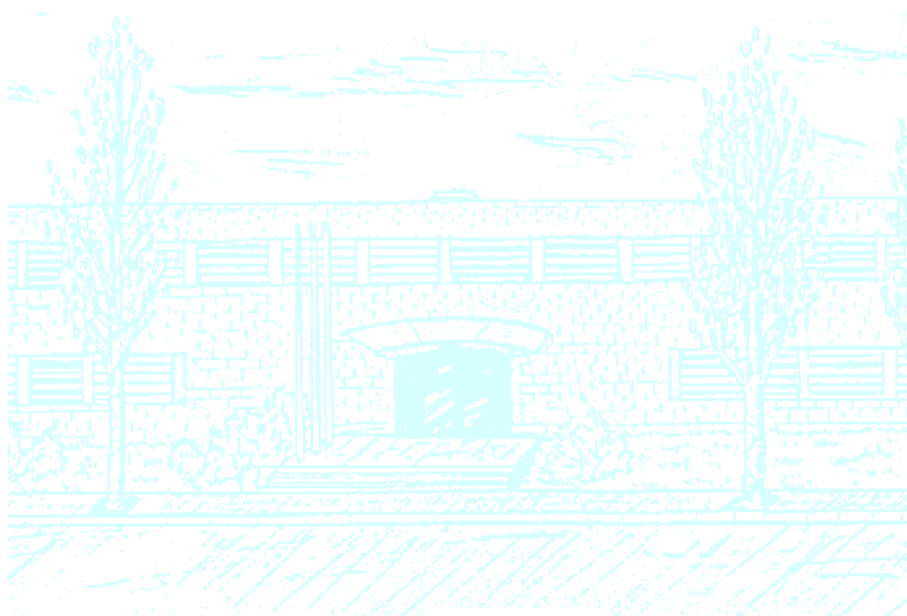
Títol: El Teorema Dels Menors Per Grafs I Matroides

Autor: Gerard Sánchez Bruguera

Directora: Anna de Mier Vinué

Departament: Departament de Matemàtiques

Convocatòria: 2017-2018



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau en Matemàtiques
Treball de fi de Grau

El Teorema Dels Menors Per Grafs I Matroides

Gerard Sánchez Bruguera

Tutoritzat per Anna de Mier Vinué

Maig, 2018

AGRAÏMENTS

Vull agrair especialment el suport a l'Anna, que va accedir a tutoritzar aquest treball en condicions poc usuals, i que en tot moment m'ha donat l'ajuda necessària.

Agraeixo als meus pares Manuel i Cristina la confiança.

També vull esmentar als meus amics de sempre Aitor, Aleix, Alejandro, Alex, Anna i Mateus que han tingut molta paciència amb mi.

Finalment, vull recordar al Miguel, amb el qual he passat tantes estones a la biblioteca de la universitat.

Gràcies a tots.

Resum

En aquest treball s'investigarà sobre el teorema dels menors de Robertson i Seymour, considerat un dels resultats més importants de la combinatòria. Aquest teorema afirma que qualsevol conjunt infinit de grafs està quasi ben ordenat per la relació de menor. Una de les conseqüències més importants és que qualsevol classe de grafs tancada per la relació de menor, té un nombre finit de menors exclosos.

Es començarà amb un resum de la demostració clàssica de Robertson i Seymour. Més endavant es farà una introducció sobre què són els matroides i algunes operacions i famílies importants d'aquests. Es finalitzarà mostrant un teorema similar al de Robertson i Seymour però per a matroides, comparant-ne els resultats.

Paraules clau

Graf, relació de menor, quasi ordre, menors exclosos, matroide.

Índex

1 Introducció	1
2 Versió clàssica del teorema dels menors	3
2.1 Quasi ordre	3
2.2 El teorema dels menors en arbres	4
2.3 Descomposició en arbre	5
2.4 Amplada d'arbre i menors exclosos	8
2.5 Sobre la demostració del teorema dels menors	9
2.6 Conseqüències del teorema	11
3 Introducció als matroides	12
3.1 Definicions de matroide	12
3.1.1 Definició per conjunts independents	12
3.1.2 Definició per circuits	13
3.1.3 Definició per bases	14
3.1.4 Definició per rang	15
3.1.5 Definició per clausura	16
3.2 Representació geomètrica dels matroides	16
3.3 Operacions en matroides	17
3.3.1 Dual	17
3.3.2 Supressió i contracció	18
3.3.3 Suma directa i unió	20
3.4 Classes de matroides	20
3.4.1 Matroides uniformes	20
3.4.2 Matroides representables	21
3.4.3 Matroides binaris	22
3.4.4 Matroides ternaris	24
3.4.5 Matroides regulars	25
3.4.6 Matroides gràfics	25
4 Matroides i el teorema dels menors	28
4.1 Matroides quasi ben ordenats i amb nombre finit de menors exclosos	28
4.2 Matroides quasi ben ordenats i amb infinits menors exclosos	28
4.3 Matroides no quasi ben ordenats i amb un nombre finit de menors exclosos	30
4.4 Matroides no quasi ben ordenats i amb infinits menors exclosos	30
4.5 El teorema dels menors	31

5 Bibliografia	32
A Apèndix: Definicions per ordre alfabètic	33

1. Introducció

L'objectiu d'aquest treball és investigar sobre el teorema dels menors de Robertson i Seymour, considerat un dels resultats més importants de la combinatòria:

Teorema 1.0.1. *Qualsevol conjunt infinit de grafs està quasi ben ordenat per la relació de menor.*

En aquest treball s'aprofundirà sobre alguns aspectes: la demostració original dels autors que donen nom al teorema, l'extensió moderna pels matroides (ja que els grafs són una classe dels matroides) i les conseqüències d'aquest teorema.

L'origen històric d'aquest teorema ve de l'any 1937, quan Klaus Wagner, un matemàtic alemany, veient el teorema de Kuratowski (el qual diu que un graf és planar si no té cap subdivisió isomorfa a K_5 ni $K_{3,3}$) va conjecturar que qualsevol família de grafs finits tancada per menors es pot definir amb un nombre de restriccions finites amb la relació de menor. Aquesta conjectura és una conseqüència directa del teorema dels menors. Per demostrar-ho, Neil Robertson i Paul Seymour van publicar fins a 20 articles amb unes 500 pàgines en total al llarg de dues dècades. Aquests articles estan recollits en *Graph Minors I-XX* (Robertson; Seymour, 1983-2004) [8].

Recentment, l'any 2014, Jim Geelen, Bert Gerards i Geoff Whittle van enunciar que havien demostrat la conjectura de Rota, la qual diu que sobre qualsevol cos finit, els matroides representables sobre aquest cos estan definits per un nombre de restriccions finites. La demostració d'aquesta conjectura està pendent de publicar-se encara. Però en un article que van escriure anunciant la demostració d'aquesta, es fa referència al resultat clàssic de Robertson i Seymour. Es menciona que encara que els dos resultats estan relacionats, ningun d'ells implica l'altre, com per exemple, no es pot estendre el teorema dels menors per a tots els matroides. Tot i això, diuen d'haver trobat una demostració del teorema dels menors generalitzat per matroides, enunciat a continuació:

Teorema 1.0.2. *Per a cada cos finit \mathbb{F} el conjunt de matroides \mathbb{F} -representables està quasi ben ordenat per la relació de menor.*

Per entendre el teorema dels menors, començarem definint conceptes importants. Donarem per suposades definicions bàsiques donades en l'assignatura obligatòria de matemàtica discreta, encara que seran incloses en l'annex del treball per facilitar la comprensió del lector.

Definició 1.0.3. Sigui \leq una relació binària sobre un conjunt X . Direm que \leq és un *quasi-ordre* en X si compleix les següents propietats sobre qualssevol elements a, b, c de X :

- *Reflexiva:* $a \leq a$
- *Transitiva:* $a \leq b$ i $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Definició 1.0.4. Un conjunt X amb una relació de quasi-ordre \leq es diu que està *quasi ben ordenat* si per a qualsevol seqüència de x_1, x_2, \dots d'elements de X , existeixen índexs i, j amb $i < j$ tals que $x_i \leq x_j$. A vegades direm que una seqüència és bona si està ben ordenada i dolenta si no ho està. Una parella (x_i, x_j) direm que és bona si $x_i \leq x_j$ i dolenta altrament.

Definició 1.0.5. Recordem que l'operació de *contracció d'arestes* en un graf G consisteix en suprimir una aresta i els seus vèrtexs incidents u, v i afegir un vèrtex w . Aquest vèrtex tindrà una aresta incident amb un altre vèrtex si prèviament u ó v tenien una aresta incident amb aquest.

Definició 1.0.6. *Relació de menor:* Un graf G_1 es diu menor d'un altre graf G_2 si G_1 es pot obtenir mitjançant l'eliminació d'arestes i vèrtexs i la contracció d'arestes sobre G_2 . Per indicar-ho, s'utilitza la notació $G_1 \preceq G_2$.

Per tant, el que ens diu el teorema dels menors és que per a qualsevol seqüència infinita de grafs finits, podem trobar dos grafs tals que el segon en aparèixer en aquesta seqüència es pot reduir al primer amb supressions i contraccions.

La conseqüència més famosa d'aquest teorema és la mencionada anteriorment en la conjectura de Wagner. Per veure-ho, comencem definint la caracterització de grafs per menors exclosos.

Definició 1.0.7. Sigui F una família de grafs tancada per la relació de menor. Llavors un graf H és un *menor exclòs* de F si $H \notin F$ però tots els seus menors sí pertanyen a F . Si \mathcal{X} és un conjunt de grafs, notarem amb $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ al conjunt de grafs que els té com a menors exclosos.

Com que pel teorema de Robertson i Seymour qualsevol conjunt de grafs infinit conté dos membres on un és menor a l'altre, aquesta família de restriccions mai pot tenir infinits elements. Encara que sabem que F ha de ser sempre finit, no hi ha cap mètode concret per trobar quants grafs hi ha i quins són. Per exemple, sabem que pels arbres l'única restricció és el K_3 , pels grafs planaris són els grafs K_5 i $K_{3,3}$ (representats en la figura 1), que pels grafs que es poden dibuixar en una esfera hi ha 103 que es coneixen tots, però en canvi pels grafs que es poden dibuixar en un tor hi ha milers, però no es coneixen tots.

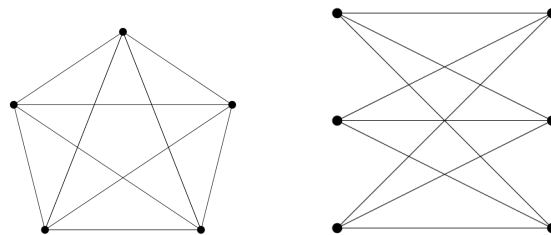


Figura 1: Grafs de K_5 i $K_{3,3}$

L'estructura d'aquest treball serà la següent:

En la primera part, començarem demostrant aquest teorema però només pels arbres, conegut com a teorema de Kruskal. Posteriorment veurem què és una descomposició d'arbre d'un graf i l'amplada d'aquesta, i donarem una idea de com Robertson i Seymour van utilitzar aquestes nocions per provar el seu teorema. També s'analitzaran algunes conseqüències que té el teorema i certes curiositats sobre aquest. La major part del contingut d'aquesta secció està extret del llibre *Graph Theory* (Diestel, 2005) [2].

Posteriorment, es farà una introducció sobre els matroides, definint què és un matroide, quines relacions té amb l'àlgebra i amb la teoria de grafs, i es mostraran operacions de matroides com la dualitat i els menors. També es mostraran varies classes de matroides, com poden ser els gràfics. Aquesta part es basarà principalment en el llibre *Matroid Theory* (Oxley, 1992) [6].

En l'última secció es veurà que en els matroides, no hi ha relació entre estar quasi ben ordenat i tenir un nombre finit de menors exclosos. Després s'analitzarà la idea de Geelen, Gerards i Whittle respecte la seva demostració del teorema sobre quasi ordre en matroides.

2. Versió clàssica del teorema dels menors

2.1 Quasi ordre

En aquesta secció es presentaran algunes propietats dels bons quasi ordres.

Proposició 2.1.1. *Un conjunt X està quasi ben ordenat per la relació de quasi ordre \leq si i només si X no conté cap seqüència decreixent o anticadena (conjunt d'elements incomparables) infinites. A més a més, qualsevol seqüència infinita de X té una subseqüència infinita creixent.*

Demostració. La implicació cap a la dreta és trivial, ja que sinó podríem trobar una subseqüència que no seria bona en un conjunt quasi ben ordenat.

Sigui K el graf complet dels naturals. En ell pintem les arestes ij de tres colors: blau si $x_i \leq x_j$, vermell si $x_i > x_j$ i groc si x_i i x_j són incomparables. El teorema de Ramsey diu que en un graf complet infinit pintat amb finits colors, hi ha un subgraf complet infinit monocromàtic. Sabent que les arestes grogues i vermelles han d'induir subgrafs complets finits, l'única opció de color per al subgraf és el blau.

Amb això, hem demostrat tant que per a qualsevol subseqüència, existeix una bona parella, com que existeix una subseqüència infinita i creixent. \square

Per a futures demostracions, ens farà falta el següent resultat, amb el qual podrem relacionar la propietat d'estar quasi ben ordenat entre un X i el conjunt dels subconjunts finits de X , que anomenarem $[X]^{<w}$. En aquest conjunt definim com a bona parella (A_i, A_j) si es pot definir una aplicació injectiva $f : A_i \rightarrow A_j$ tal que $\forall x \in A_i, x \leq f(x)$.

Lema 2.1.2. *Si X està quasi ben ordenat, llavors $[X]^{<w}$ també ho està.*

Demostració. Suposem que X està quasi ben ordenat però $[X]^{<w}$ no. En aquest segon conjunt, construïm una seqüència dolenta $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de forma inductiva: Si A_i està definida $\forall i < n$, llavors prenem A_n com un element que pertanyi a una seqüència dolenta que comenci amb A_0, \dots, A_n i $|A_n|$ sigui mínim.

Com que A_i mai pot ser buit (ja que el buit és menor o igual a qualsevol altre conjunt) podem prendre de cada A_n un element a_n i definir la successió $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on $B_n = A_n \setminus a_n$.

Utilitzant el lema anterior, ja que X està quasi ben ordenat, existeix una subseqüència de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que és estrictament creixent, diguem-li $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$. Definint n_0 com el primer element d'aquesta, llavors la successió $A_0, \dots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, \dots$ ha de ser bona, ja que $B_{n_0} \leq A_{n_0}$, i per la construcció de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, A_{n_0} era el de menor mida per a que la successió fos dolenta. Per tant, hi ha dos elements que són una bona parella. Comprovem tots els possibles casos.

- La parella no pot ser de l'estil (A_i, A_j) , ja que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una seqüència dolenta.
- Per un raonament semblant, tampoc pot ser (B_i, B_j) , ja que si f és la funció injectiva per aquesta bona parella, definint $f' : A_i \rightarrow A_j$ tal que $f'(a_i) = a_j$ i $f'(x) = f(x)$ altrament, obtenim una aplicació que fa bona la parella (A_i, A_j) , i seria una contradicció.
- Finalment, (A_i, B_j) tampoc pot ser bona parella perquè llavors tindríem $A_i \leq B_j \leq A_j$.

Per tant, tenim una bona successió sense cap bona parella, la qual cosa és contradictòria, i la contradicció ve de suposar que $[X]^{<w}$ no estava ben ordenat. \square

2.2 El teorema dels menors en arbres

Començarem fent la demostració del teorema de Kruskal, que diu el següent:

Teorema 2.2.1. (Kruskal) *El conjunt d'arbres finits està quasi ben ordenat per la relació de menor.*

El teorema va ser conjeat per Andrew Vázsonyi i demostrat per Joseph Kruskal l'any 1960. Posteriorment, s'han aconseguit demostracions d'aquest més curtes.

Aquest teorema el provarem per un cas més específic, que són els arbres amb arrel amb una relació d'ordre diferent. Per això, començarem definint els arbres amb arrels.

Definició 2.2.2. Un arbre amb arrel és una parella (T, r) on T és un arbre i r és un dels vèrtexs de T . L'ordre dels vèrtexs d'un arbre amb arrel està definit com $x \leq y$ si $x \in rTy$ (és a dir, x pertany al camí de r a y dintre de T).

Definició 2.2.3. La relació d'ordre que prendrem en els arbres amb arrels $(T_1, r_1) \leq (T_2, r_2)$ es compleix si existeix un isomorfisme de grafs entre una subdivisió de (T_1, r_1) i un subarbre (T'_2, r'_2) de (T_2, r_2) que preserve el ordre. En la figura 2 es pot observar que el graf de l'esquerra és menor al de la dreta, on la part en negreta seria el subarbre (T'_2, r'_2) .

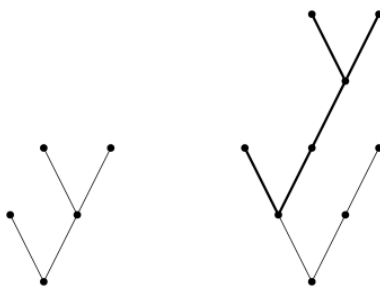


Figura 2: Dos arbres amb arrel, un menor de l'altre

Cal notar que un cop s'hagi provat el teorema de Kruskal amb els arbres amb arrels, també està provat pels arbres en general, ja que $(T_1, r_1) \leq (T_2, r_2)$ implica $T_1 \preceq T_2$ independentment de les eleccions de r_1 i r_2 .

Demostració del teorema de Kruskal. Suposem que existeix una seqüència d'arbres amb arrel que no està quasi ben ordenada. Llavors podem crear per inducció una seqüència dolenta $(T_n, r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Suposem que ja tenim els arbres fins a $n-1$, llavors com a (T_n, r_n) prenem un arbre tal que la seqüència $(T_0, r_0), \dots, (T_n, r_n)$ sigui dolenta i on $|T_n|$ sigui mínim.

Definim A_n per a tot $n \in \mathbb{N}$ com el conjunt de subarbres de T_n que no contenen r_n i on les seves arrels són adjacents a r_n . Sigui $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, volem veure que A està quasi ben ordenat.

Prenem una seqüència qualsevol d'arbres de A que anomenarem $(T^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Per a cadascun d'aquests definim n_k al menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^k \in A_n$. Sigui k_0 la k amb el valor més petit de n_k . Llavors la seqüència $T_0, \dots, T_{n_{k_0}-1}, T^{k_0}, T^{k_0+1}, \dots$ ha de ser bona, ja que $|T^k| < |T_{n_k}|$ (un és part de l'altre) i T_{n_k} era el d'ordre mínim per a una seqüència dolenta. Per tant, mirem on podem trobar una bona parella:

- (T_i, T_j) no pot ser-ho per com hem construït la seqüència.

- (T_i, T^j) tampoc pot ser-ho, ja que això implicaria que $T_i \leq T^j \leq T_{n_j}$, on $i < n_k$ i $n_j \geq n_k$.
- Per tant, una parella bona ha de ser de l'estil (T^i, T^j) , la qual cosa implica que A està quasi ben ordenat.

Com que A està quasi ben ordenat, pel lema 2.1.2 els $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dintre de $[A]^{<\omega}$ estan quasi ben ordenats. Anomenem (T_i^p, r_i^p) i (T_j^q, r_j^q) a cadascun dels subarbres continguts en A_i i A_j respectivament. Si la bona parella és (A_i, A_j) , per a cada p existeix una isomorfisme f_p entre una subdivisió de (T_i^p, r_i^p) i un subarbre de (T_j^q, r_j^q) per a cert q , i la q és diferent per a cada p . Per a veure que $(T_i, r_i) \leq (T_j, r_j)$, construïm l'isomorfisme ϕ de la següent manera:

- $\phi(r_i) = r_j$.
- Per a cada aresta $r_i r_i^p$, realitzem subdivisions fins a tenir un camí tan llarg com $r_j f_p(r_i^p)$. Establím l'imatge del isomorfisme ϕ entre els dos camins de tal forma que preservi l'ordre.
- En cada (T_i^p, r_i^p) , $\phi = f_p$, prenent les mateixes subdivisions.

Com hem construït ϕ , verifica les condicions de 2.2.3. Això vol dir que (T_i, T_j) són una bona parella en una seqüència dolenta, fet que és contradictori. Com la contradicció ve de suposar que existeix una seqüència dolenta, ja tenim demostrat que els arbres amb arrels estan ben ordenats per \leq , i en conseqüència, tots els arbres per la relació dels menors. \square

2.3 Descomposició en arbre

Per a expandir el resultat obtingut amb Kruskal a altres grafs que no siguin arbres, utilitzarem el que s'anomena descomposició en arbre.

El primer en proposar les idees que s'explicaran en aquesta part va ser Rudolph Halin l'any 1976. Robertson i Seymour desconeixien l'article on estaven publicades, per tant les van tornar a definir amb diferents noms a l'original, que són els que ara s'utilitzen habitualment.

Definició 2.3.1. Sigui G un graf qualsevol. Sigui la parella (T, \mathcal{V}) , on T és un arbre i $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$ una família de conjunts de vèrtexs tals que per a cada $t \in T$, $V_t \subseteq V(G)$. Aquesta parella es diu que és una *descomposició en arbre* de G si compleix les següents propietats:

- $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$.
- Per a cada aresta $e \in G$, existeix $t \in T$ tal que els dos vèrtexs incidents a e pertanyen a V_t .
- Si $t_1, t_2, t_3 \in T$ són tals que $t_2 \in t_1 T t_3$, llavors $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2}$.

Les dues primeres propietats ens indiquen que $G = \bigcup_{t \in T} G[V_t]$, on $G[V_t]$ són subgrafs induïts de G . Mentre que la tercera propietat serveix per a agrupar els vèrtexs del graf en alguna cosa similar a un arbre. Per comprendre millor que és una descomposició en arbre, en la figura 3 es pot veure una possible descomposició en arbre del graf de l'esquerra en l'arbre de la dreta. És fàcil comprovar que satisfà les tres propietats definides abans.

Definició 2.3.2. Les *parts* d'una descomposició en arbre seran cadascun dels subgrafs $G[V_t]$.

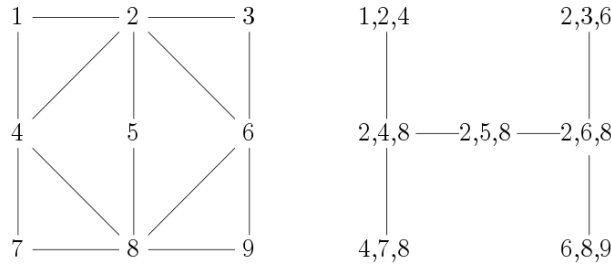


Figura 3: Exemple de descomposició en arbre

Primer de tot, demostrarem algunes propietats interessants sobre les descomposicions en arbres:

Lema 2.3.3. *Per a qualsevol subgraf $H \subseteq G$, la parella $(T, (V_t \cap V(H))_{t \in T})$ és una descomposició en arbre de H .*

Demostració. Simplement s'ha de provar que compleix les tres propietats:

- $\bigcup_{t \in T} V_t \cap V(H) = V(G) \cap V(H) = V(H)$
- Per a qualsevol aresta $e \in H$, com que també $e \in G$, existeix t tal que V_t té els dos vèrtexs incidents a e . Per tant, $V_t \cap V(H)$ també ho verifica.
- Si $t_2 \in t_1 T t_3$, $(V_{t_1} \cap V(H)) \cap (V_{t_3} \cap V(H)) = (V_{t_1} \cap V_{t_3}) \cap V(H) \subseteq V_{t_2} \cap V(H)$

□

Lema 2.3.4. *Siguin $t_1 t_2$ una aresta de T , T_1 i T_2 els components de $T - t_1 t_2$ on $t_1 \in T_1$ i $t_2 \in T_2$, $U_1 := \bigcup_{t \in T_1} V_t$ i $U_2 := \bigcup_{t \in T_2} V_t$. Llavors es compleix que $V_{t_1} \cap V_{t_2} = U_1 \cap U_2$, i que $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ separa U_1 de U_2 .*

Demostració. La inclusió $V_{t_1} \cap V_{t_2} \subseteq U_1 \cap U_2$ és immediata. Per altra banda, com que per a qualsevol $t'_1 \in T_1$ i $t'_2 \in T_2$ llavors $t_1 \in t'_1 T t'_2$, i aplicant la segona propietat de la descomposició en arbre, tenim que $V_{t'_1} \cap V_{t'_2} \subseteq V_{t_1}$. Aplicant el mateix per a t_2 , arribem a que $V_{t'_1} \cap V_{t'_2} \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$. Com que això és cert per a qualsevol $t'_1 \in T_1$ i $t'_2 \in T_2$, arribem a la conclusió que $U_1 \cap U_2 \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$.

Per demostrar que $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ separa U_1 de U_2 , prenem qualsevol vèrtex $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ i $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Si existís l'aresta $u_1 u_2$, per la segona propietat de descomposició en arbre, existiria un $t \in T$ tal que $u_1, u_2 \in V_t$. Però per l'elecció de u_1 i u_2 , t no pertany ni a T_1 ni a T_2 . Per tant, no existeix cap aresta, cosa que implica que $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ realment separa U_1 i U_2 . □

Lema 2.3.5. *Sigui un conjunt de vèrtexs $W \subseteq V(G)$. Llavors o existeix $t \in T$ tal que $W \subseteq V_t$, o existeixen vèrtexs $w_1, w_2 \in W$ i $t_1, t_2 \in T$ tals que $w_1, w_2 \notin V_{t_1} \cap V_{t_2}$ i estan separats per $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ dintre de G .*

Demostració. Suposem que $W \not\subseteq V_t$ per a cap $t \in T$. Llavors en concret existeixen $w_1, w_2 \in W$ tals que $\nexists t \in T$ que compleixi $w_1, w_2 \in V_t$. Prenem $t'_1, t'_2 \in T$ tals que $w_1 \in V_{t'_1}$ i $w_2 \in V_{t'_2}$. Com $t'_1 \neq t'_2$, prenem una aresta qualsevol $t_1 t_2 \in t'_1 T t'_2$. Finalment, pel lema 2.3.4, arribem a que $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ separa U_1 i U_2 , on $w_1 \in U_1$, ja que $t'_1 \in T_1$, i anàlogament arribem a que $w_2 \in U_2$. Com que també es compleix $w_1, w_2 \notin V_{t_1} \cap V_{t_2}$, queda demostrat el lema. □

Definició 2.3.6. Sigui (T, \mathcal{V}) una descomposició en arbre. Anomenarem *amplada* de la descomposició en arbre al següent número:

$$\max_{t \in T} \{|V_t| - 1\}$$

Definició 2.3.7. Sigui G un graf, la seva *amplada d'arbre* $tw(G)$ (tree-width) és la mínima amplada de qualsevol descomposició en arbre de G .

Cal notar que el -1 que apareix en la definició 2.3.6 només és perquè l'amplada d'arbre de qualsevol arbre sigui 1.

Utilitzant aquestes definicions, Robertson i Seymour en l'article Graph Minors IV (1990) van demostrar una extensió del teorema de Kruskal per a grafs tancats per l'amplada d'arbre, ampliant les classes de grafs on podem aplicar el teorema dels menors.

Teorema 2.3.8. Per a qualsevol enter $k > 0$, el conjunt de grafs amb amplada d'arbre $< k$ està quasi ben ordenat per la relació de menor.

La idea de la demostració és semblant a la de Kruskal, però adaptada: S'ha d'iterar $tw(G)$ vegades l'argument de la mínima seqüència dolenta. Per a utilitzar aquest resultat per al teorema dels menors, hem de deduir alguna cosa sobre els grafs que no cobreix, és a dir, els que la seva amplada d'arbre pot ser molt gran.

Definició 2.3.9. Sigui \mathcal{C} un conjunt de subconjunts connexos de $V(G)$. Direm que $U \subseteq V(G)$ *cobreix* \mathcal{C} si intersecciona amb cada element de \mathcal{C} .

Definició 2.3.10. Sigui \mathcal{C} un conjunt de subconjunts connexos de $V(G)$. Direm que $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ *es toquen* si s'intersequen o existeix una aresta entre ells.

Lema 2.3.11. Sigui \mathcal{C} un conjunt de subconjunts connexos de $V(G)$ tal que qualsevol parella d'elements es toquen. Llavors per a tota descomposició en arbre (T, \mathcal{V}) , existeix $V_t \in \mathcal{V}$ tal que V_t cobreix \mathcal{C} .

Demostració. Utilitzant 2.3.4, sabem que existeix una aresta $t_1 t_2 \in T$ tal que per a tot $C \in \mathcal{C}$, o bé $C \cap V_{t_1} \neq \emptyset$ o bé $C \cap V_{t_2} \neq \emptyset$, ja que $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ separa el graf en dos components. Suposem que ni V_{t_1} ni V_{t_2} cobreixen \mathcal{C} , és a dir, que existeix C_1 que no toca a V_{t_1} i C_2 que no toca a V_{t_2} . Llavors C_1 i C_2 estan separats per $V_{t_1} \cap V_{t_2}$, la qual cosa és contradictòria amb el fet que es toquin. Per tant, un dels dos conjunts cobreix \mathcal{C} . \square

Utilitzant aquest lema es pot arribar a la següent caracterització per a grafs amb amplada d'arbre gran. Les obstruccions que realment utilitzen Robertson i Seymour són els anomenats tangles, que són similars a les del següent teorema, però més complicades i potents.

Teorema 2.3.12. Sigui $k > 0$ un enter i G un graf. Llavors $tw(G) \geq k$ si i només si G té una col·lecció de conjunts de vèrtexs que es toquen de dos en dos i que no pot ser coberta per menys de k vèrtexs.

Existeix una manera alternativa de mesurar el gruix de l'arbre a partir de la següent definició:

Definició 2.3.13. Direm que una descomposició en arbre és *fina* si per a qualsevol $s \in \mathbb{N}$ i $t_1, t_2 \in T$, G conté s camins disjunts de V_{t_1} a V_{t_2} o existeix $t \in t_1 t_2$ tal que $|V_t| < s$.

Les definicions d'amplada i de finesa semblen oposades. Tot i això, es pot demostrar que es pot trobar una descomposició en arbre que compleixi els dos criteris. Aquesta propietat seria molt útil d'aplicar en qualsevol moment que es necessiti una descomposició en arbre.

Teorema 2.3.14. Per a qualsevol graf G existeix una descomposició en arbre fina d'amplada $tw(G)$.

2.4 Amplada d'arbre i menors exclosos

Definició 2.4.1. Una propietat de grafs és *hereditària* si és tancada per la relació de menor.

Per tant, el conjunt de grafs que satisfà una propietat hereditària es pot expressar amb un conjunt de menors exclosos. En aquesta secció treballarem principalment amb una propietat hereditària, l'amplada d'arbre.

Proposició 2.4.2. Per a qualsevol $k > 0$, la propietat de tenir amplada d'arbre $< k$ és hereditària.

Demostració. Suposem que $(T, (V_t)_{t \in T})$ és una descomposició en arbre d'un graf G d'amplada $tw(G)$. Per la supressió d'una aresta e , $(T, (V_t)_{t \in T})$ ja serveix com a descomposició en arbre, i per tant $tw(G \setminus e) < tw(G)$. Per a la contracció d'una aresta xy , prenem $V'_t = V_t \setminus \{x, y\} \cup \{v_{xy}\}$ si $V_t \cap \{x, y\} \neq \emptyset$, altrament $V'_t = V_t$. Hem de comprovar que $(T, (V'_t)_{t \in T})$ és una descomposició en arbre de G/xy .

Les dues primeres propietats definides en 2.3.1 es compleixen immediatament per com hem construït V'_t . Per a la tercera propietat, si $v_{xy} \notin V'_{t_1} \cap V'_{t_3}$, es segueix complint igual que abans. Suposem que $v_{xy} \in V'_{t_1} \cap V'_{t_3}$. En els casos $x \in V_{t_1} \cap V_{t_3}$ i $y \in V_{t_1} \cap V_{t_3}$, t_1 i t_3 són adjacents, per tant no hi ha problemes pels nous V'_t . Finalment, el cas $x \in V_{t_1}$ $y \in V_{t_3}$ o viceversa, si $t_2 \in t_1 T t_3$, vol dir que $\{x, y\} \in V_{t_2}$, ja que T és un arbre. Per tant, $v_{xy} \in V'_{t_2}$.

Com que $(T, (V'_t)_{t \in T})$ és una descomposició d'arbre de G/xy de la mateixa amplada o menor que $(T, (V_t)_{t \in T})$, es compleix que $tw(G/xy) \leq tw(G)$. □

Per tant, la propietat d'amplada d'arbre menor que k pot ser expressada per menors exclosos. Podem veure que per exemple, per a $k = 2$ hi ha prou amb K_3 com a menor exclòs, i per a $k = 3$ hi ha prou amb K_4 . De fet, es pot afirmar el següent sobre els conjunts de grafs exclosos per un sol menor:

Teorema 2.4.3. Sigui G un graf. L'amplada d'arbre de $Forb_{\preceq}(G)$ està fitada si i només si G és planar.

Demostració. Aquí només es mostrarà la demostració cap a la dreta. La demostració sencera es troba en [2] teorema 12.4.3].

Per a demostrar-ho, provarem el contrarecíproc. Si trobem una família de grafs planars tals que la seva amplada d'arbre no està fitada, per a qualsevol G no planar la família pertanyerà a $Forb_{\preceq}(G)$.

Prenem els grafs planars anomenats *graelles* $n \times n$, que són els grafs en vèrtexs sobre $\{1, 2, \dots, n\}^2$ i que el conjunt d'arestes és $\{(i, j)(i', j') : |i - i'| + |j - j'| = 1\}$. Si definim les creus d'una graella com $C_{ij} = \{(i, l) : l = 1, \dots, n\} \cup \{(l, j) : l = 1, \dots, n\}$, és fàcil veure que el conjunt de totes les creus no pot ser cobert per menys de n vèrtexs. Per tant, pel teorema 2.3.12, l'amplada d'arbre d'una graella és major o igual a n , i de fet, és exactament n . En la figura 4 prenent com a conjunts V_t a $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, ..., $\{6, 7, 8, 9\}$ i l'arbre T com a un camí, tenim una descomposició d'amplada 3. □

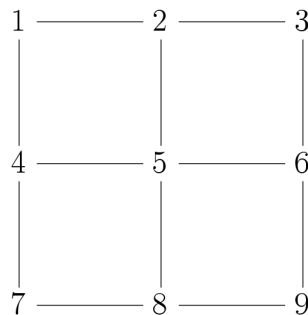


Figura 4: Graella on $n=3$

2.5 Sobre la demostració del teorema dels menors

Com ja s'ha comentat abans en aquest treball, la demostració del teorema dels menors és molt extensa. A continuació donarem una idea de com prossegueix la demostració. Es pot trobar la informació en la qual aquesta secció es basa majoritàriament en l'article *El gran teorema de la combinatòria moderna* (Noy, 2011) [5].

Suposem que els grafs no estan quasi ben ordenats, és a dir, que existeix una successió infinita G_0, G_1, G_2, \dots tal que per a tot $i < j$ es compleix $G_i \not\preceq G_j$. Concretament, això implica que la successió G_1, G_2, \dots pertany a $\text{Forb}_{\preceq}(G_0)$. Si G_0 és un graf planar, utilitzant [2.4.3] sabem que $\text{Forb}_{\preceq}(G_0)$ té amplada d'arbre fitada, i pel teorema [2.3.8], està quasi ben ordenat, la qual cosa implica una contradicció. Per a provar el cas amb un G_0 qualsevol, es necessita un teorema d'estructura pels grafs que exclouen un graf fix com a menor. Per tal d'aconseguir aquest teorema, són necessaris els següents elements:

- *k-sumes*. Una k -suma és una unió de dos grafs identificant dos subgrafs complets de mida k . Si tenim H com un graf k -connex i dos grafs G_1 i G_2 on cap dels dos conté a H com a menor, llavors una l -suma de G_1 i G_2 amb $l < k$ tampoc conté a H com a menor. Amb aquesta operació podem construir grafs grans sense H com a menor i on l'estructura es pot definir com a descomposició d'arbre.
- *Grafs en superfícies*. Si un graf H no es pot immersir en una superfície S , els grafs que sí es poden immersir en S no el contenen com a menor. Recordem que per immersir el graf en una superfície, s'han de representar les arestes com a corbes que no es tallin, i que cada cara sigui homeomorfa a un disc.
- *Extensions fitades i vèrtexs àpex*. Suposem que per a un graf H qualsevol conjunt de vèrtex U amb $|U| < k$, el graf $H - U$ no admet una immersió en una superfície S . Sigui G un graf tal que amb la supressió de com a màxim k vèrtexs s'obté un graf immersible en S . Llavors G no conté a H com a menor. Aquests vèrtexs suprimits s'anomenen àpex.
- *Vòrtexs*. Donat un cicle C , triem un conjunt d'arcs (vèrtexs consecutius del cicle) tals que cada vèrtex apareix com a molt en k arcs. Per a cada arc A , creem el vèrtex v_A i el connectem a tants vèrtexs de l'arc A com vulguem. També connectem tantes parelles (v_A, v_B) com es vulgui si A i B tenen algun vèrtex en comú. Aquesta construcció és afegir un vòrtex d'amplada com a molt k (com el de la figura [5]).

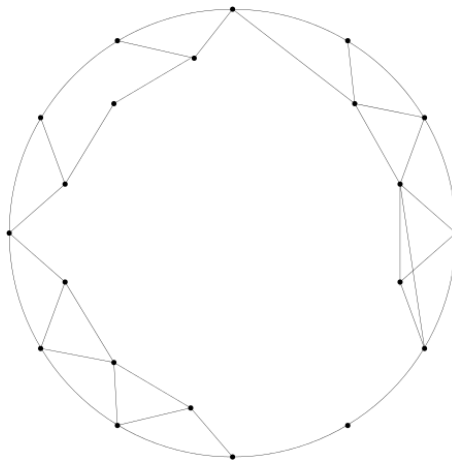


Figura 5: Exemple de vòrtex d'amplada 2

Amb aquests operacions podem definir la família de grafs \mathcal{L}_k , on k és un enter positiu, que és la família de tots els grafs que es poden obtenir amb les següents operacions:

- Immergint un graf G en una superfície de gènere com a molt k .
- Triant com a molt k cares i afegint a cada una d'elles un vòrtex d'amplada com a molt k .
- Creant com a molt k vèrtexs àpexs nous, connectant-los com vulguem amb la resta.
- Realitzant la k -suma de grafs obtinguts amb els passos anteriors.

Robertson i Seymour van demostrar que tota classe de grafs tancada per menors està continguda en un \mathcal{L}_k .

Teorema 2.5.1. *Per a tot graf H existeix un enter k tal que $\text{Forb}_{\preceq}(H) \subset \mathcal{L}_k$.*

Prenem la successió anterior G_1, G_2, \dots , que està dintre de $\text{Forb}_{\preceq}(G_0)$. Pel teorema anterior, tots aquests grafs es poden obtenir fent k -sumes de grafs, els quals es poden quasiimmergir en una superfície de gènere fitat. Dit d'una altra manera, tenen una estructura d'arbre on cada una de les parts són grafs quasiimmergibles en una superfície. De forma similar a la demostració del teorema de Kruskal [2.2.1](#) s'ha de provar que els elements que podem formar en cadascuna de les parts estan quasi ben ordenats.

Per a demostrar-ho, s'utilitza inducció sobre el gènere de S . Si el gènere és 0, és a dir, $S = \mathbb{S}^2$, llavors tornem a tenir que G_0 és planar, i per tant sí que està quasi ben ordenat. Pel pas a la inducció suposem que $S \neq \mathbb{S}^2$. Per a cada graf G_i hi ha una immersió en S que coincideix amb un cercle C_i no contràtil en un nombre finit de vèrtexs. Tallant la superfície per C_i i tapant-ne els forats, s'obté una o dues noves superfícies de gènere més petit. Quan produeix una sola superfície, anomenarem a aquesta S_i . Com s'han eliminat un nombre petit de vèrtexs, H_i segueix sent quasiimmergible en S_i . Si hi ha un nombre infinit de grafs que s'immergeixen en S_i , ja ho tenim per la hipòtesi d'inducció. Quan els grafs que es separen en dues superfícies S'_i i S''_i són infinits, llavors H_i es separa en dos subgrafs H'_i i H''_i quasiimmergibles en les superfícies corresponents, i que només comparteixen els vèrtexs del tall. Podem demostrar per inducció com abans que els H'_i i H''_i estan quasi ben ordenats, i emprant [2.1.2](#), les parelles (H'_i, H''_i) també estan

quasi ben ordenades. Identificant adequadament els vèrtexs del tall, es pot arribar a demostrar que els H_i també estan quasi ben ordenats.

2.6 Conseqüències del teorema

La conseqüència més immediata del teorema en la teoria de grafs és la ja mencionada en la introducció d'aquest treball, que ara és formularà i demostrarà degudament.

Teorema 2.6.1. *Qualsevol família de grafs tancada per menors té un nombre finit de menors exclosos.*

Demostració. Suposem que existeix una família de grafs amb un nombre infinit de menors exclosos H_1, H_2, \dots . Per la definició que hem donat de menor exclòs en 1.0.7 no és possible que existeixin $i < j$ tal que $H_i \preceq H_j$. Per altra banda, el teorema de Roberston i Seymour ens diu que en H_1, H_2, \dots sí que ha d'haver-hi una parella $i < j$ tal que $H_i \preceq H_j$. Per contradicció, queda demostrat. \square

Una conseqüència algorísmica que els mateixos autors del teorema van demostrar és que per a qualsevol graf H existeix un algorisme per a provar si un graf conté H com a menor o no en temps polinomial (cúbic més en concret). Tot i això, les constants que s'asseguren en aquest teorema són massa grans quan el nombre de vèrtexs de H és considerable. Si això ho estenem per a qualsevol família de menors exclosos, tenim que per a qualsevol propietat hereditària ha d'haver-hi un algorisme cúbic que determini si un graf la compleix o no.

Tot i que està assegurada l'existència de tal algorisme, no existeix cap mètode per trobar en tots els casos aquest algorisme. És el cas dels grafs sense nusos. De forma breu, un nus és un cicle que no pot ser transformat de forma contínua en un cercle en \mathbb{R}^3 , és a dir, qualsevol transformació té creuaments (la figura 6 representa el nus més senzill). Tot i que és fàcil de veure que aquests grafs són tancats per menors, a dia d'avui no s'ha trobat cap algorisme, ni en temps polinòmic ni superior, que sigui capaç de detectar si un graf té nusos o no.

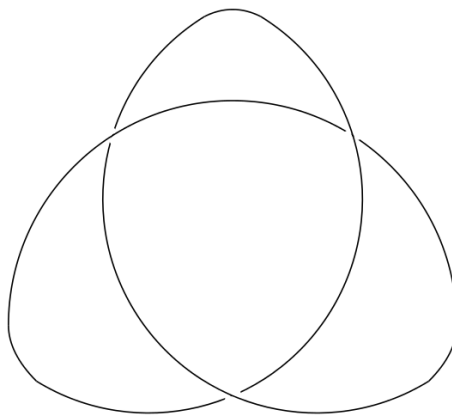


Figura 6: Nus trivial

3. Introducció als matroides

Per abordar el segon punt de vista per estudiar les propietats de l'ordre de menor, començarem definint i mostrant propietats de l'estructura en la qual es basa, anomenada matroide.

El primer article on es parla sobre matroides va ser publicat per Hassler Whitney l'any 1935, és l'anomenat 'On the abstract properties of linear dependence'. El matemàtic Takeo Nakasawa també va inventar de forma independent els matroides, tot i que la seva aportació va passar desapercebuda. En la publicació de Whitney, es proposen axiomes d'independència per a definir els matroides.

Per a treballar amb matroides, s'utilitza notació extreta de l'àlgebra lineal i de la teoria de grafs, ja que estan vinculats a aquestes branques de les matemàtiques. També hi ha moltes definicions equivalents de matroide. Començarem doncs descrivint algunes d'aquestes definicions, les quals es poden trobar en [6 capítol 1]. En aquest llibre també es poden trobar les demostracions que s'ometen.

Excepte que es digui el contrari, tots els conjunts que apareixeran seran finits. Si E és un conjunt, notarem 2^E a la col·lecció de subconjunts de E . La diferència de dos conjunts X i Y es notará per $X - Y = \{x \in X : x \notin Y\}$. També, si $x \in X$ s'utilitzarà $X - x$ i $X \cup x$ en comptes de $X - \{x\}$ i $X \cup \{x\}$ per simplificació.

3.1 Definicions de matroide

3.1.1 Definició per conjunts independents

Definició 3.1.1. Un *matroide* M és una parella (E, \mathcal{I}) , on E és un conjunt finit i \mathcal{I} una col·lecció de subconjunts de E anomenats independents, que verifica les següents condicions:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ i $I' \subseteq I$, llavors $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ i $|I_1| < |I_2|$, llavors existeix $e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

També direm que dos matroides $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ i $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ són *isomorfs* si existeix una bijecció ϕ entre E_1 i E_2 tal que $X \in \mathcal{I}_1$ si i només si $\phi(X) \in \mathcal{I}_2$.

El nom de matroide ve donat per la relació que va trobar Whitney d'aquesta estructura amb les matrius, mostrada en la següent proposició:

Proposició 3.1.2. Sigui E un conjunt d'indexació de columnes d'una matriu A de mida $m \times n$ sobre el cos \mathbb{F} , i sigui \mathcal{I} el conjunt de subconjunts X de E pel qual les columnes de la matriu A indexades per X són linealment independents en l'espai vectorial \mathbb{F}^m . Llavors (E, \mathcal{I}) és un matroide.

Demostració. És trivial comprovar que les condicions (I1) i (I2) es satisfan. Per a provar (I3), prenem $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ tals que $|I_1| < |I_2|$. Llavors, l'espai generat per les columnes indexades per I_2 en \mathbb{F}^m és de major dimensió que el generat per les columnes I_1 . Per tant, existeix un $e \in I_2$, $e \notin I_1$, tal que les columnes indexades per $I_1 \cup e$ són independents en $V(m, F)$, és a dir, $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$. \square

Anomenarem matroide vectorial a un matroide obtingut d'una matriu A i es notará per $M[A]$.

Exemple 3.1.3. Sigui (E, \mathcal{I}) el matroide amb:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

Sobre qualsevol cos \mathbb{F} , és fàcil comprovar que la següent matriu defineix al mateix matroide

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Definició per circuits

La definició de matroides per circuits és similar a la vista anteriorment, però es centra en els subconjunts de E que no són independents, i per tant direm que són dependents.

Definició 3.1.4. Un *circuit* és un conjunt dependent tal que qualsevol subconjunt d'aquest és independent, és a dir, un circuit és un dependent minimal. Per a referir-nos al conjunt de circuits d'un matroide, utilitzarem la lletra \mathcal{C} . Un únic element $e \in E$ tal que $\{e\} \in \mathcal{C}$ serà anomenat *llaç*.

Exemple 3.1.5. Prenent el mateix matroide (E, \mathcal{I}) de l'exemple 3.1.3, el conjunt de circuits seria:

$$\mathcal{C} = \{\{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}\}.$$

En particular, $\{3\}$ és un llaç.

Teorema 3.1.6. Sigui E un conjunt i \mathcal{C} una col·lecció de subconjunts de E que verifiquen les següents propietats:

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C2) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ i $C_1 \subseteq C_2$, llavors $C_1 = C_2$.

(C3) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$, i existeix $e \in C_1 \cap C_2$, llavors existeix un $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Sigui \mathcal{I} el conjunt de subconjunts de E que no contenen cap element de \mathcal{C} , llavors (E, \mathcal{I}) és un matroide. A més a més, \mathcal{C} és el conjunt de circuits d'aquest.

Demostració. Per a demostrar-ho, cal provar que es verifiquen (I1), (I2) i (I3).

(I1) Per (C1), $\emptyset \notin \mathcal{C}$. Per tant, $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) Si I no conté cap membre de \mathcal{C} , I' tampoc, per tant també és independent.

(I3) Suposem que (I3) és fals. Llavors prenem $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ tals que $|I_1| < |I_2|$, on no existeixi $e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$, i també que compleixin que $|I_1 - I_2|$ sigui mínim. $|I_1 - I_2|$ no és buit, ja que això implicaria $I_1 \subseteq I_2$. Per tant, per a qualsevol $e \in I_2 - I_1$, $I_1 \cup e \subseteq I_2$, i per (I2) seria independent. Prenem doncs un element e tal que $e \in I_1 - I_2$.

Per a cada $f \in I_2 - I_1$, definim $T_f = (I_2 \cup e) - f$. Com $|I_1 - T_f| < |I_1 - I_2|$, i aquest darrer l'havíem seleccionat com a mínim entre els elements de \mathcal{I} , llavors $T_f \notin \mathcal{I}$. Per tant, existeix $C_f \in \mathcal{C}$ i que és subconjunt de T_f . Observem que $e \notin C_f$, ja que això implicaria $C_f \subseteq I_2$, i seria contradictori.

Si prenem $g \in I_2 - I_1$, llavors $C_g \cap (I_2 - I_1) \neq \emptyset$, perquè sinó és compliria $C_g \subseteq ((I_2 \cap I_1) \cup e) - g \subseteq I_1$. Prenem doncs $h \in C_g \cap (I_2 - I_1)$.

Com $e \in C_g \cap C_h$ i $C_g \neq C_h$ perquè $h \in C_g$ i $h \notin C_h$, per (C3), existeix C que verifica $C \subseteq (C_g \cup C_h) - e$. Per tant, $C \in \mathcal{I}_2$, la qual cosa és contradictòria. Això implica que (I3) es verifica.

Comprovar que \mathcal{C} és el conjunt de circuits és immediat utilitzant les definicions de circuit i la de \mathcal{I} en el teorema. \square

Aquesta definició de matroide, a diferència de l'altra, ens permet relacionar els matroides amb grafs de forma directa usant la proposició mostrada a continuació.

Proposició 3.1.7. *Sigui E el conjunt d'arestes d'un graf G i \mathcal{C} el conjunt d'arestes de cada cicle de G . Llavors \mathcal{C} és el conjunt de circuits d'un matroide en E , que rep el nom de matroide de cicles de G , i ho notarem com $M(G)$.*

Demostració. Demostrar (C1) i (C2) és trivial. Per provar (C3), prenem dos cicles C_1 i C_2 que comparteixin una aresta e , que té com a vèrtexs incidents u i v . Sigui P_i el camí de u a v per C_i sense passar per e . Sigui w el primer vèrtex de P_1 que no té el següent vèrtex de P_1 dintre de P_2 , el qual ha d'existir per ser C_1 diferent a C_2 . Per altra banda, sigui x el primer vèrtex on es retroben P_1 i P_2 un cop passat w , que també existeix ja que els dos camins acaben a v . Unint la secció del camí P_1 que va de w a x i la del camí P_2 que va de x a w , s'obté un cicle C_3 tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$. \square

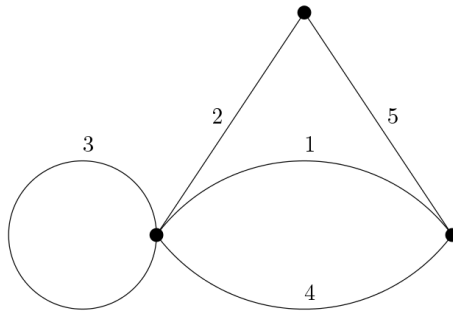


Figura 7: Representació del matroide de [3.1.3](#)

Encara que tots els grafs es poden descriure com a matroides d'aquesta forma, el contrari no és cert. El matroide de l'exemple [3.1.3](#) sí que és un graf, mostrat a la figura [7](#) però hi ha certs matroides que no poden ser representats gràficament. Sobre aquest tema s'aprofundirà més endavant en aquest projecte.

3.1.3 Definició per bases

Definició 3.1.8. Les bases d'un matroide són els elements maximals de \mathcal{I} . Notarem al conjunt de bases d'un matroide amb la lletra \mathcal{B} .

Exemple 3.1.9. En el matroide definit en l'exemple [3.1.3](#) el conjunt de bases és

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

Utilitzar les bases per a definir un matroide és una forma més senzilla que la de definir tots els independents, ja que qualsevol independent és subconjunt d'una base.

Lema 3.1.10. Si B_1, B_2 són bases d'un matroide, llavors $|B_1| = |B_2|$.

Demostració. Suposem $|B_1| > |B_2|$. Per (I3), existeix $e \in B_1 - B_2$ tal que $B_2 \cup e \in \mathcal{I}$, i això contradiu que B_2 sigui base. Per tant, $|B_1| \leq |B_2|$, i repetint el mateix procés arribem a que $|B_1| = |B_2|$. \square

És fàcil demostrar utilitzant les propietats de la definició 3.1.1 que la caracterització per bases és la següent:

Teorema 3.1.11. Sigui E un conjunt i \mathcal{B} una col·lecció de subconjunts de E que verifiquen les següents propietats:

(B1) \mathcal{B} no és buit.

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i existeix $x \in B_1 - B_2$, llavors existeix $y \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Sigui \mathcal{I} la col·lecció de tots els subconjunts de cada element de \mathcal{B} . Llavors (E, \mathcal{I}) és un matroide, i el seu conjunt de bases és \mathcal{B} .

Hi ha una altra definició equivalent per a base, que consisteix en substituir la propietat (B2) per:

(B2*) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i existeix $x \in B_2 - B_1$, llavors existeix $y \in B_1 - B_2$ tal que $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}$.

Encara que són molt semblants i una implica l'altra, no és una simple reindexació dels termes.

3.1.4 Definició per rang

Definició 3.1.12. Sigui $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide i X un subconjunt de E . La *restricció* de \mathcal{I} a X és:

$$\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}.$$

En conseqüència, anomenarem *restricció de M per X* al matroide que té per independents $\mathcal{I}|X$.

Definició 3.1.13. Sigui $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide. El *rang* r és l'aplicació que envia un element $X \subseteq E$ a la mida de les bases de $M|X$.

Cal mencionar que el rang està ben definit gràcies al lema 3.1.10 que assegura que totes les bases tenen la mateixa mida.

Exemple 3.1.14. Pel matroide definit en l'exemple 3.1.3 observem alguns exemples de l'aplicació rang sobre diferents conjunts, com $r(\{3\}) = 0$, $r(\{1\}) = r(\{1, 4\}) = 1$ o $r(\{1, 2\}) = 2$.

Teorema 3.1.15. Sigui E un conjunt i r una aplicació de 2^E a $\mathbb{N} \cup 0$ que verifica les següents propietats:

(R1) $\forall X \subseteq E, 0 \leq r(X) \leq |X|$.

(R2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, llavors $r(X) \leq r(Y)$.

(R3) Si $X, Y \subseteq E$, llavors $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Sigui \mathcal{I} la col·lecció de subconjunts de E que verifiquen $r(X) = |X|$. Llavors (E, \mathcal{I}) és un matroide, i r la seva funció de rang.

3.1.5 Definició per clausura

Definició 3.1.16. Sigui $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide. La *clausura* és una funció de 2^E a 2^E definida com:

$$cl(X) = \{x \in E : r(X) = r(X \cup x)\}.$$

Exemple 3.1.17. En el matroide definit en 3.1.3, $cl(\{3\}) = \{3\}$, $cl(\{1\}) = \{1, 3, 4\}$ i $cl(\{1, 2\}) = E$.

Teorema 3.1.18. Sigui E un conjunt i cl una aplicació de 2^E a 2^E que verifica les següents propietats:

(CL1) Si $X \subseteq E$, llavors $X \subseteq cl(X)$.

(CL2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, llavors $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

(CL3) Si $X \subseteq E$, llavors $cl(cl(X)) = cl(X)$.

(CL4) Si $X \subseteq E$, $x \in E$ i $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$, llavors $x \in cl(X \cup y)$.

Sigui $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : x \notin cl(X - x) \ \forall x \in X\}$. Llavors (E, \mathcal{I}) és un matroide i cl la seva clausura.

La definició de clausura ens permet també definir certs conjunts d'elements de E diferenciats i que seran importants pel desenvolupament de la teoria de matroides.

Definició 3.1.19. Un conjunt $X \subseteq E$ és un *flat* si $X = cl(X)$.

Definició 3.1.20. Un conjunt $X \subseteq E$ és un *hiperplà* si és un flat de rang $r(M) - 1$.

Definició 3.1.21. Un conjunt $X \subseteq E$ és *generador* si $cl(X) = E$. Alternativament, X és generador si conté una base.

3.2 Representació geomètrica dels matroides

Per a certs matroides senzills, definirem una forma de representar-los geomètricament. La representació geomètrica no s'haurà de confondre amb un graf que representi un matroide.

Identificarem a cadascun dels elements de E amb un punt. Tres punts que siguin dependents es dibuixaran en una mateixa línia, no necessàriament recta. En el cas que dos punts siguin dependents, es dibuixaran un al costat de l'altre. Un punt que sigui un llaç es dibuixarà dins d'una caixa apartat de la resta. Amb aquest sistema, suposarem que qualsevol conjunt de quatre punts serà dependent, per tant així només es representen geomètricament matroides de rang com a molt 3. Una possible representació geomètrica del matroide de 3.1.3 és la mostrada en la figura 8, o la del pla de Fano mostrada en la figura 10, el qual es definirà més endavant.



Figura 8: Representació geomètrica de 3.1.3

Per a representar matroides de rang 4, es pot fer un dibuix en tres dimensions amb les mateixes normes d'abans, però ara quatre punts coplanars són dependents, i cinc punts qualssevol són sempre dependents. Es pot trobar un exemple d'aquesta representació en la figura tridimensional 9.

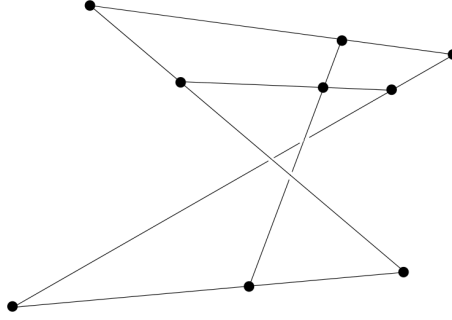


Figura 9: Representació geomètrica de $M^*(K_{3,3})$

3.3 Operacions en matroides

3.3.1 Dual

La teoria dels duals en matroides ja va ser proposada per Whitney en el 1935, i és una eina molt potent per afrontar tot tipus de problemes de matroides. En aquesta secció definirem què és el dual d'un matroide i en veurem algunes propietats.

Teorema 3.3.1. *Sigui $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide i \mathcal{B} el seu conjunt de bases. Llavors $\mathcal{B}^* = \{E - B : B \in \mathcal{B}\}$ és el conjunt de bases d'un matroide en E , que anomenarem el dual de M , i es noterà per M^**

Demostració. Com que \mathcal{B} no és buit, \mathcal{B}^* tampoc ho és i verifica (B1).

Per comprovar si verifica (B2), prenem dos bases B_1^* i B_2^* de \mathcal{B}^* i $B_i = E - B_i^*$, que són bases de \mathcal{B} . Llavors, si $x \in B_1^* - B_2^*$, també es compleix que $x \in B_2 - B_1$. Per (B2*), existeix $y \in B_1 - B_2 = B_2^* - B_1^*$ tal que $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}$, o equivalentment $E - (B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}^*$. Transformant aquesta expressió obtenim:

$$((E - B_1) - x) \cup y = (B_1^* - x) \cup y \in \mathcal{B}^*.$$

□

Exemple 3.3.2. En el matroide $M = (E, \mathcal{I})$ definit en 3.1.3, en el dual M^* , les bases i una possible representació en forma de matriu són les següents:

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Més endavant en aquest treball, en la secció de matroides representables, s'explicarà un mètode per a trobar la matriu del dual en aquest cas.

Definició 3.3.3. Sigui M un matroide. Anomenarem *coindependents*, *cocircuits*, *cobases*, *cohiperplans* i *cogeneradors* als independents, circuits, bases, hiperplans i generadors de M^* .

Una propietat que és conseqüència immediata de la definició de dual és:

$$r(M) + r(M^*) = |E|. \quad (1)$$

També hi ha una relació directa entre els independents, circuits, hiperplans i generadors d'un matroide i els del seu dual:

Proposició 3.3.4. *Sigui $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide i $X \in E$. Llavors*

- (a) *X és independent si i només si $E - X$ és cogenerador.*
- (b) *X és generador si i només si $E - X$ és coindependent.*
- (c) *X és circuit si i només si $E - X$ és cohiperplà.*
- (d) *X és hiperplà si i només si $E - X$ és cocircuit.*

Demostració. Només cal demostrar (a) i (c), ja que les altres són conseqüència d'aplicar el mateix resultat en el dual.

- (a) X és independent si i només si existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $X \subseteq B$, que és equivalent a dir que $B^* \subseteq E - X$. Com $E - X$ és cogenerador si i només si conté una base del dual, queda demostrat en les dues direccions.
- (c) Farem la implicació cap a la dreta, i la implicació cap a l'esquerra es pot fer de forma similar. X és circuit si per a qualsevol $x \in X$, $X - x$ és independent. Per l'apartat (a), tenim que $E - (X - x) = (E - X) \cup x$ és cogenerador. Per tant, $E - X$ pot ser o cohiperplà o cogenerador, ja que només hem tret un element. Si fos cogenerador, implicaria que X és independent per (a) i seria una contradicció. Per tant, $E - X$ és cohiperplà.

□

Proposició 3.3.5. *Si C és un circuit i C^* un cocircuit d'un matroide $M = (E, \mathcal{I})$, llavors $|C \cap C^*| \neq 1$.*

Demostració. Suposem que existeixen C i C^* tals que $|C \cap C^*| = 1$. Sigui $\{x\} = C \cap C^*$. Per la proposició 3.3.4, $H = E - C$ és un hiperplà tal que $H \cap C = C - \{x\}$. Per tant, l'element x és tal que $x \notin H$ però $x \in cl(H)$, la qual cosa contradiu que H sigui hiperplà. □

3.3.2 Supressió i contracció

En aquesta secció definirem aquestes dues operacions, que són les que defineixen la relació de menor per a matroides. També provarem que per a matroides gràfiques, la contracció i la supressió de matroides i de grafs són de fet equivalents.

Definició 3.3.6. Sigui $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide i sigui $T \subseteq E$. Llavors la *supressió* de T a M , notada com $M \setminus T$, és un matroide sobre $E - T$ on els independents són els de M que estan continguts en $E - T$.

De fet, la definició 3.1.12 de restricció i la de supressió són equivalents, ja que $M \setminus T = M|(E - T)$.

Corol·lari 3.3.7. *Els circuits de $M \setminus T$ són $\{C \in \mathcal{C}(M) : C \cap T = \emptyset\}$.*

Definició 3.3.8. Sigui $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide i sigui $T \subseteq E$. La *contracció* de T a M , notada com M/T , és el següent matroide.

$$M/T = (M^* \setminus T)^*.$$

Les següents proposicions que mencionarem donaran una idea de com són els independents i els circuits resultants al aplicar una contracció.

Proposició 3.3.9.

$$\mathcal{I}(M/T) = \{I \subseteq E - T : M|T \text{ té una base } B \text{ tal que } B \cup I \in \mathcal{I}(M)\}.$$

Proposició 3.3.10. Els circuits de M/T són els conjunts minimal no buits de $\{C - T : C \in \mathcal{C}(M)\}$.

Per altra banda, els lemes esmentats a continuació proven la commutativitat entre contraccions amb elles mateixes i entre contraccions i supressions de matroides. Les demostracions d'ambdues són trivials utilitzant les definicions dels circuits en [3.3.7](#) i [3.3.10](#).

Lema 3.3.11. Sigui $M(E, \mathcal{I})$ un matroide i $T_1, T_2 \subseteq E$, llavors

$$(M/T_1)/T_2 = (M/T_2)/T_1 = M/(T_1 \cup T_2).$$

Lema 3.3.12. Sigui $M(E, \mathcal{I})$ un matroide i $T_1, T_2 \subseteq E$, llavors

$$(M/T_1) \setminus T_2 = (M \setminus T_2)/T_1$$

Aquests lemes ens permeten demostrar la següent proposició, que relaciona les operacions de contracció i supressió de matroides i grafs:

Proposició 3.3.13. Sigui G un graf i T un conjunt d'arestes de G , llavors $M(G \setminus T) = M(G) \setminus T$ i $M(G/T) = M(G)/T$.

Demostració. En el cas de la supressió, recordem que els independents d'un matroide són els subconjunts que no contenen cap circuit. És obvi que suprimint arestes no s'afegeixen circuits a un subconjunt, per tant es verifica $M(G \setminus T) = M(G) \setminus T$.

Pel cas de la contracció, ho demostrarem per a una aresta t , i per inducció utilitzant el lema [3.3.11](#) serà cert per a qualsevol conjunt d'arestes T .

Si t és un llaç, llavors $G/t = G \setminus t$ i $M(G)/t = M(G) \setminus t$, la qual cosa implica $M(G/T) = M(G)/T$. Si t no és un cicle, sigui $I \subseteq E - t$. És fàcil veure que I no té cap cicle en G/t si i només si $I \cup t$ no té cap cicle en G . Per tant, $\mathcal{I}(M(G/t)) = \mathcal{I}(M(G)/t)$. \square

Utilitzant les definicions de supressió i contracció, podem definir de forma anàloga a l'apartat clàssic la relació de menor per matroides. Com ja s'ha mencionat anteriorment en el treball, els matroides no estan quasi ben ordenats per la relació de menor. Tot i això, podem trobar certes classes de matroides que sí que ho estan. Tampoc hi ha cap implicació entre estar quasi ben ordenat i tenir un nombre finit de menors exclosos. Més endavant es mostraran exemples que evidencien aquest fet.

3.3.3 Suma directa i unió

Definició 3.3.14. Siguin $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ i $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$, on $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Llavors la *suma directa* de matroides és $M_1 \oplus M_2 = (E, \mathcal{I})$, amb $E = E_1 \cup E_2$ i $\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$.

Definició 3.3.15. Siguin $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ i $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$. Llavors la *unió* de matroides és $M_1 \cup M_2 = (E, \mathcal{I})$, on $\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$.

Cal notar que no tots els autors consideren necessari que E sigui el mateix conjunt per als matroides de la unió. En aquest cas, la suma directa seria un cas particular d'unió. És rutinari comprovar que tant aplicant la suma directa com la unió s'obté un matroide.

3.4 Classes de matroides

3.4.1 Matroides uniformes

Definició 3.4.1. Siguin $m, n \in \mathbb{N} \cup 0$ amb $m \leq n$. Sigui E un conjunt de n elements i \mathcal{I} la col·lecció de tots els subconjunts de E amb mida menor o igual a m . Llavors $U_{m,n} = (E, \mathcal{I})$ és un matroide i s'anomena *matroide uniforme*.

Si $m = 0$, cada element del matroide és un llaç. Els matroides $U_{n,n}$ són els que no tenen conjunts dependents, mentre que el matroide $U_{0,0}$ és el matroide buit.

Corol·lari 3.4.2. Un matroide és $U_{m,n}$ si tots els subconjunts de E amb mida $m + 1$ són circuits.

La classe dels matroides uniformes és tancada per les operacions de dual, supressió i contracció com veurem a continuació, però no per la suma directa ni la unió.

Proposició 3.4.3. Sigui $U_{m,n} = (E, \mathcal{I})$ un matroide uniforme, $T \in E$, i $t = |T|$. Llavors

$$U_{m,n}^* = U_{n-m,n}, \quad (2)$$

$$U_{m,n} \setminus T = \begin{cases} U_{m,n-t} & \text{si } t < n - m \\ U_{n-t,n-t} & \text{si } n - m \leq t \leq n, \end{cases} \quad (3)$$

$$U_{m,n}/T = \begin{cases} U_{m-t,n-t} & \text{si } t < m \\ U_{0,n-t} & \text{si } m \leq t \leq n. \end{cases} \quad (4)$$

Demostració. La prova de la identitat (2) és trivial, ja que si les bases de $U_{m,n}$ són tots els conjunts de mida m , les bases del dual són tots els conjunts de mida $n - m$.

Quan es suprimeix $T \in E$, els circuits resultants del menor són $\{C \in \mathcal{C}(M) : C \cap T = \emptyset\}$ pel corol·lari 3.3.7. Per tant, utilitzant el corol·lari 3.4.2, tots els circuits del menor són els subconjunts de $E - T$ amb mida $m + 1$, demostrant l'expressió (3).

Per altra banda utilitzant la proposició 3.3.10, quan contraïem $T \in E$ els circuits del menor són els conjunts minimal de $\{C - T : C \in \mathcal{C}(M)\}$. Per tant, per cada element que es contrau, els circuits són tots els subconjunts de mida una unitat més petita, que és el que diu l'expressió (4). □

3.4.2 Matroides representables

Definició 3.4.4. Els *matroides representables* són aquells que són isomorfs a un matroide vectorial. En concret, direm que un matroide és \mathbb{F} -representable si es pot representar sobre el cos \mathbb{F} .

En aquest apartat començarem demostrant que el dual d'un matroide \mathbb{F} -representable és també \mathbb{F} -representable, trobant-ne una matriu que el representi.

Definició 3.4.5. Sigui M un matroide de rang r \mathbb{F} -representable. Llavors sigui $A = (I_r | D)$ una matriu sobre \mathbb{F} que el representa, on I_r és la matriu identitat de rang r i D una matriu qualsevol. Anomenarem a aquesta matriu com una *matriu representativa estàndard*.

És fàcil deduir que sempre existeix una matriu representativa estàndard fent operacions elementals de files i columnes, i ordenant adequadament els elements de E .

Teorema 3.4.6. Si M és el matroide de $(I_r | D)$, llavors $(-D^T | I_{n-r})$ representa M^* .

Demostració. Sigui B una base de M . Amb les permutacions adequades de files i columnes d'una matriu, podem suposar que $(I_r | D)$ té les columnes e_1, e_2, \dots, e_n ordenades de tal forma que la base B conté els elements $e_{r+1-t}, \dots, e_{2r-t}$ per algun $t \in \{0, 1, \dots, r\}$. Per tant, si la matriu original és

$$\begin{pmatrix} I_{r-t} & 0 & D_1 & D_2 \\ 0 & I_t & D_3 & D_4 \end{pmatrix}$$

la submatriu induïda per B és

$$\begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ I_t & D_3 \end{pmatrix}.$$

Per altra banda, la matriu de $(-D^T | I_{n-r})$ separada per parts és

$$\begin{pmatrix} -D_1^T & -D_3^T & I_{r-t} & 0 \\ -D_2^T & -D_4^T & 0 & I_{n-(2r-t)} \end{pmatrix}$$

la qual cosa implica que la submatriu induïda per $E - B$ és

$$\begin{pmatrix} -D_1^T & 0 \\ -D_2^T & I_{n-(2r-t)} \end{pmatrix}.$$

Aquesta submatriu és de rang màxim perquè D_1 és de rang màxim per ser B base, i al mateix temps $I_{n-(2r-t)}$ també ho és. Per tant, $E - B$ és base del matroide induït per $(-D^T | I_{n-r})$. Repetint el mateix procés per una base de $(-D^T | I_{n-r})$, es pot demostrar el complementari és base en $(I_r | D)$, i arribem a la conclusió que M^* està representat per $(-D^T | I_{n-r})$. \square

Corol·lari 3.4.7. Si M és \mathbb{F} -representable, llavors M^* també ho és.

Com que per suprimir un element d'un matroide en la seva forma de matriu només cal eliminar la columna d'aquest, i al mateix temps la contracció és una operació que es pot realitzar mitjançant la supressió i l'operació del dual, també és compleix el següent:

Corol·lari 3.4.8. *Els matroides \mathbb{F} -representables són tancats per la relació de menor.*

En els següents apartats parlarem concretament dels matroides representables sobre \mathbb{F}_2 i \mathbb{F}_3 . Aquests, junt amb \mathbb{F}_4 són els únics on actualment es coneix una família de menors exclosos. Dels altres matroides \mathbb{F} – representables encara no se sap si existeix una o si aquesta és finita.

3.4.3 Matroides binaris

Definició 3.4.9. Un matroide $M = (E, I)$ és un *matroide binari* si pot ser representat sobre \mathbb{F}_2 .

En aquest apartat es mostrarà la caracterització dels matroides binaris utilitzant menors exclosos. Aquest resultat va ser demostrat per primer cop per Tutte (1958). Aquest resultat diu que $U_{2,4}$ és l'únic menor exclòs pels matroides binaris. És evident que $U_{2,4}$ no és representable sobre \mathbb{F}_2 (només hi han 3 vectors independents no nuls amb dues coordenades). Per tant, el que falta per demostrar és que un matroide no binari ha de contenir com a menor un matroide isomorf a $U_{2,4}$. Per això, seran necessaris els següents lemes.

Lema 3.4.10. *Sigui N un menor d'un matroide M i sigui $X = C \cap D$ on $C \in \mathcal{C}(N)$ i $D \in \mathcal{C}(N^*)$. Llavors existeixen $C' \in \mathcal{C}(M)$ i $D' \in \mathcal{C}(M^*)$ tals que $X = C' \cap D'$.*

Demostració. Per inducció, hi ha prou amb provar-ho per la contracció o supressió d'un element e .

Pel cas $M \setminus e$, si C és un circuit de $M \setminus e$, també és circuit de M , per tant prenem $C' = C$. Per altra banda, prenem $D' = D$ si aquest és un cocircuit, i si no ho és, prenem $D' = D \cup e$, que si ho serà. Llavors, $C' \cap D' = C \cap (D \cup e) = X$. El cas M/e es fa anàlogament. \square

Lema 3.4.11. *Sigui M un matroide i $X = C \cap D$ on $C \in \mathcal{C}(N)$ i $D \in \mathcal{C}(N^*)$, $X \neq \emptyset$. Llavors M té un menor N tal que X és un circuit, cocircuit, generador i cogenerated de N amb $r(N) = r(N^*) = |X| - 1$.*

Demostració. Contraient els elements de $C - D$ i suprimint els de $D - C$, obtenim un menor N_1 on X és circuit i cocircuit. Si existeix un element $e \in E(N_1) - X$ tal que $e \notin cl_{N_1}(X)$, obtenim un menor N_2 contraient e . Repetint aquest procés fins que no existeixi cap element que compleixi les condicions anteriors, obtindrem un menor N_k tal que X és circuit, cocircuit i generador. Anàlogament, mentre X no sigui cogenerated del menor, obtenim menors suprimint un element $e \in E(N_k) - cl_{N_k}(X)$. Al final s'obté un menor N tal que X és circuit, cocircuit, generador i cogenerated, la qual cosa trivialment implica $r(N) = r(N^*) = |X| - 1$. \square

També usarem la següent caracterització de matroide binari, encara que en aquest treball només serà demostrada la implicació cap a la dreta, extreta de *Matroids: A Geometric Introduction* (Gordon; McNulty, 2012) [4, Teorema 8.15]. La demostració sencera es pot trobar a [6, teorema 9.1.2], junt amb altres caracteritzacions.

Lema 3.4.12. *Un matroide M és binari si i només si per a qualsevol circuit C i cocircuit D , $|C \cap D|$ és parell.*

Demostració. Sigui $M = (E, \mathcal{I})$ és binari, on $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i sigui A la matriu $r \times n$ sobre \mathbb{F}_2 que el representa. Si $C = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$ és un circuit, vol dir que una de les columnes és combinació lineal de

totes les altres. Com estem sobre \mathbb{F}_2 , això és equivalent a

$$\sum_{j=1}^k e_{ij} = \vec{0}.$$

On hem identificat les columnes de A amb els elements de E , per simplificar la notació. Aquesta equació és equivalent a

$$Av = \vec{0}$$

on v és el vector indicador de C .

Per altra banda, si C^* és un cocircuit, per 3.3.4, $E - C^*$ és un hiperplà. Per àlgebra, sabem que un hiperplà està definit per a una sola equació, $\sum_{i=1}^r a_i x_i = 0$. Per tant, si una columna no està en el hiperplà, que és el mateix que dir que pertany al cocircuit, ha de verificar $\sum_{i=1}^r a_i x_i = 1$. Aquestes dues equacions impliquen

$$(a_1, a_2, \dots, a_r)A = u$$

on u és el vector indicador de C^* .

Per a saber si $|C \cap C^*|$ és parell o senar, farem el producte escalar dels vectors indicadors uv sobre \mathbb{F}_2 . Si tenen en comú un nombre parell d'elements, $uv = 0$, i altrament $uv = 1$. Aleshores

$$uv = (a_1, a_2, \dots, a_r)Av = (a_1, a_2, \dots, a_r)\vec{0} = 0,$$

Tal i com volíem veure. □

Teorema 3.4.13. *Per a un matroide M , les següents propietats són equivalents.*

- (i) M és binari.
- (ii) Si C és un circuit i D un cocircuit, $|C \cap D| \neq 3$.
- (iii) M no té cap menor isomorf a $U_{2,4}$.

Demostració. Per provar-ho, demostrarem (i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (iii) i (iii) \Rightarrow (i). Les dues darreres demostracions es faràn pel mètode del contrarecíproc.

(i) \Rightarrow (ii) És un resultat immediat del lema 3.4.12

(ii) \Rightarrow (iii) Suposem que M té $N = U_{2,4}$ com a menor. Sigui Z un subconjunt de N de amb $|Z| = 3$, la qual cosa implica que és circuit i cocircuit de N . Pel lema 3.4.10, Z és la intersecció d'un circuit i cocircuit de M , que prova la negació de (ii).

(iii) \Rightarrow (i) Suposem que M no és binari. En particular, podem trobar un menor N no binari on qualsevol menor sigui binari. Pel lema 3.4.12, existeixen un circuit i un cocircuit de N tal que la seva intersecció X té cardinal senar. Pel lema 3.4.11, podem dir que existeix un menor N_1 de N en el qual X és circuit i generador de N_1 i N_1^* . Com que $|X|$ és senar, pel lema 3.4.12, N_1 tampoc és binari, i per l'elecció de N , $N = N_1$. Utilitzant la proposició 3.3.4, es dedueix que $H_0 = E(N) - X$ és un hiperplà independent i cohiperplà coindependent. Per tant, $|H_0| = r(N) - 1 = |X| - 2 \geq 1$. Prenem doncs $y \in H_0$. Clarament $H_0 - y$ és un flat independent de N amb rang $r(N) - 2$. Sigui $\{H_0, H_1, \dots, H_m\}$ el conjunt d'hiperplans de N que contenen a $H_0 - y$. Llavors $(H_1 \cap X, H_2 \cap X, \dots, H_m \cap X)$ és una partició de X (no s'inclou $H_0 \cap X$ perquè és buit). Utilitzant la proposició 3.3.4, per a $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ $E(N) - H_i$ és un cocircuit que conté y i per tant no conté X . També podem deduir que $(E(N) - H_i) \cap X$ és no buit per a qualsevol

i. Per tant, $(E(N) - H_i) \cap X$ és la intersecció d'un circuit i un cocircuit de N , i pel lema 3.4.11 N té un menor N_2 tal que $(E(N) - H_i) \cap X$ és circuit generador de N_2 i N_2^* . Per l'elecció de N i el fet que $|(E(N) - H_i) \cap X| < |X|$, $|(E(N) - H_i) \cap X|$ és parell. Llavors, com $|X|$ és senar, $|H_i \cap X|$ també ho és. Com que H_i no conté a X i $|X|$ és senar, $m \geq 3$. Podem concloure que $N/(H_0 - y)$ és un matroide de rang 2 que té quatre flats de rang 1 com a mínim, que són $\{y\}$, $H_1 - (H_0 - y)$, $H_2 - (H_0 - y)$, ..., $H_m - (H_0 - y)$. Per tant, $N/(H_0 - y)$ té una restricció isomorfa a $U_{2,4}$ (repetint l'argument de l'elecció de N , es pot veure que de fet $N \cong U_{2,4}$). \square

3.4.4 Matroides ternaris

Definició 3.4.14. Un matroide $M = (E, I)$ és un *matroide ternari* si pot ser representat sobre \mathbb{F}_3 .

Pel que fa a la caracterització dels matroides ternaris utilitzant els menors exclosos, el primer en enunciar quin era el conjunt va ser Ralph Reid el 1971, però no va presentar cap demostració. Les primeres demostracions van ser presentades per Bixby i per Seymour, ambdues el 1979. Una altra demostració que es pot trobar en [6, teorema 10.3.1] és la realitzada per Khan i Seymour el 1988, que és la més breu que es coneix.

Definició 3.4.15. El *pla de Fano* F_7 és el pla projectiu finit amb el menor nombre possible de punts i línies, 7 de cada. La representació geomètrica d'aquest matroide es troba en la figura 10. Fano és un matroide binari, ja que es pot representar amb la següent matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

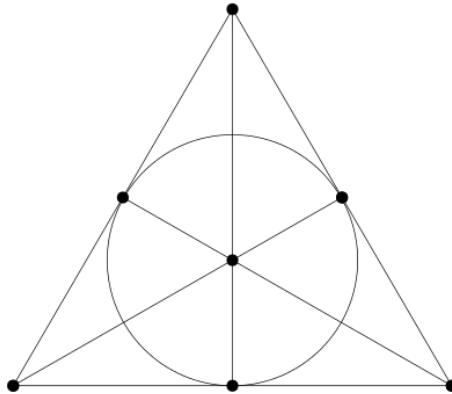


Figura 10: Representació geomètrica del pla de Fano.

El matroide obtingut amb la representació geomètrica del pla de Fano és important perquè apareix en el llistat de menors exclosos de moltes famílies de matroides, com és el cas dels matroides ternaris.

Teorema 3.4.16. Un matroide és ternari si i només si no té cap menor isomorf a $U_{2,5}$, $U_{3,5}$, F_7 o F_7^*

Totes les proves que es coneixen depenen d'un mateix resultat, demostrat per Brylawski i Lucas (1976), el qual diu que els matroides ternaris són únicament \mathbb{F}_3 -representables. Un matroide representable M es

diu que és *únicament* \mathbb{F} -representable si totes les matrius $r \times n$ que el representen són equivalents. És a dir, si A i B són tals matrius, existeix una matriu P $r \times r$ i una matriu Q $n \times n$ invertibles tals que $A = PBQ$.

3.4.5 Matroides regulars

Definició 3.4.17. Un matroide M és un *matroide regular* si és \mathbb{F} -representable per a qualsevol cos \mathbb{F} .

Teorema 3.4.18. Per a un matroide M , les següents propietats són equivalents.

- (i) M és regular.
- (ii) M pot ser representat sobre \mathbb{R} per una matriu unimodular. És a dir, que pot ser representat una matriu quadrada amb determinant 1 ó -1 .
- (iii) M no té cap menor isomorf a $U_{2,4}$, F_7 ni a F_7^* .

La implicació (i) \Rightarrow (iii) és fàcil de demostrar sabent que un matroide és \mathbb{F} -representable sobre qualsevol F si ho és sobre \mathbb{F}_2 i \mathbb{F}_3 , i utilitzant les caracteritzacions dels matroides binaris i ternaris donades anteriorment.

Aquesta classe de matroides ha estat molt estudiada per trobar-se al mig de dues classes importants, els binaris i els gràfics, que seran els que veurem a continuació. També són importants perquè amb la segona caracterització que hem donat, es poden vincular amb la programació lineal.

3.4.6 Matroides gràfics

Definició 3.4.19. Un matroide M és un *matroide gràfic* si és el matroide de cicles per a cert graf G .

Proposició 3.4.20. Sigui M un matroide gràfic. Llavors existeix un graf connex G que representa a M .

Demostració. Si M és gràfic, existeix un graf H que el representa. Si és connex ja està. En el cas que no sigui connex, siguin H_1, H_2, \dots, H_n els components connexos. Sigui G el graf on de cada component connex de H , prenem un vèrtex v_1, v_2, \dots, v_n i els identifiquem com un únic vèrtex v . És fàcil comprovar que $M(H) \cong M(G)$ i G és connex. \square

Teorema 3.4.21. Si G és un graf, $M(G)$ és regular.

Demostració. Primer, a cada aresta del graf li assignem una direcció arbitrària, obtenint el graf dirigit $D(G)$. Anomenem $A = [a_{ij}]$ a la matriu on les columnes estan indexades per les arestes i les files pels vèrtexs, i verifica:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ és el principi de l'aresta no llaç } j \\ -1 & \text{si } i \text{ és el final de l'aresta no llaç } j \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per demostrar que $M(G) = M[A]$ sobre qualsevol cos \mathbb{F} , veurem que els circuits d'un són dependents en l'altre i viceversa.

Prenem C un cicle de G . Si C és un llaç, la columna de A' que representa C és 0, per tant també és un circuit. Si no és un llaç, prenem les arestes e_1, e_2, \dots, e_k que el formen seguint el cicle. Per a cada aresta, prenem α_i que pren els següents valors segons la direcció de l'aresta respecte del cicle.

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si la direcció de l'aresta és bona} \\ -1 & \text{si la direcció de l'aresta és dolenta.} \end{cases}$$

Siguin $\vec{v}(e_1), \vec{v}(e_2), \dots, \vec{v}(e_k)$ els vectors de les columnes corresponents. Llavors és immediat comprovar que $\sum_{j=1}^k \alpha_j \vec{v}(e_j) = 0$. Per tant, C és un dependent en $M[A]$.

Per altra banda, prenem $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ un circuit de $M[A]$. Si és un llaç, també és un llaç a G , per tant és circuit de $M(G)$. Pel cas $m > 1$, prenem els vectors de les columnes $\vec{v}(f_1), \vec{v}(f_2), \dots, \vec{v}(f_m)$. Per ser un circuit, han d'existir $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$ on no tots zero, tals que $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \vec{v}(f_i) = 0$. Per tant, en cada fila de la matriu que té un element diferent de zero, han d'existir com a mínim dos diferents de zero. Això implica que en el subgraf G_1 induït per $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ cada vèrtex té com a mínim grau dos, la qual cosa significa que existeix un cycle. Per tant $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ és dependent en $M(G)$.

Com hem demostrat que tot circuit de $M(G)$ és dependent de $M[A]$, i tot circuit de $M[A]$ és dependent de $M(G)$, tenim que $\mathcal{C}(M(G)) = \mathcal{C}(M[A])$, i per tant $M(G) = M[A]$. \square

En aquest treball no es farà la demostració completa de quins són els menors exclosos pels matroides gràfics, però sí comprovarem què són no gràfics. Per exemple, pel teorema anterior és immediat que els següents matroides són no gràfics.

Corol·lari 3.4.22. *Els matroides $U_{2,4}$, F_7 i F_7^* no són gràfics.*

Lema 3.4.23. *Si G és un graf connex, llavors el matroide $M(G)$ verifica*

$$r(M(G)) = |V(G)| - 1.$$

Demostració. És immediat comprovar que els arbres generadors són el conjunt de bases de $M(G)$, ja que un arbre generador és el conjunt d'arestes més gran el qual si li afegim una aresta qualsevol que no contingui (si existeix) conté un cycle. El cardinal de qualsevol arbre generador és $|V(G)| - 1$. \square

Proposició 3.4.24. *Els matroides $M(K_5)^*$ i $M(K_{3,3})^*$ no són gràfics.*

Demostració. Suposem que existeix G tal que $M(G) = M(K_5)^*$. Per la proposició 3.4.20, podem suposar G connex. Com $M(K_5)$ té 10 elements i rang 4, $M(G)$ ha de tenir 10 elements i rang 6. Pel lema 3.4.23, G té 7 vèrtexs i 10 arestes. La mitjana de graus dels vèrtexs és $2|E(G)|/|V(G)| = 20/7 < 3$. Per tant, existeix un vèrtex de grau com a molt 2. Si són X les arestes d'aquest vèrtex, $E - X$ és clarament un hiperplà, i en conseqüència X és cocircuit. Això implicaria que $M(K_5)$ tingués un circuit de mida 1 o 2, i això no és cert. Per tant, no existeix G tal que $M(G) = M(K_5)^*$.

Per a $M(K_{3,3})^*$ es demostra igual. Suposem que existeix G tal que $M(G) = M(K_{3,3})^*$. Com $M(K_{3,3})$ té 9 elements i rang 5, $M(G)$ tindria 9 elements i rang 4. El grau mitjà dels vèrtexs de G és $18/5 < 4$, la qual cosa implica que existeix un vèrtex de grau 3 o menor. Per tant, tindríem un circuit de mida 3 o menys en $M(K_{3,3})$, on tots els circuits són de mida 4. \square

Els matroides que hem vist que no són gràfics són de fet tots els necessaris per a caracteritzar els matroides gràfics amb menors exclosos, com va demostrar Tutte l'any 1959. La demostració del següent teorema també es pot trobar en [6] teorema 13.3.1].

Teorema 3.4.25. *Un matroide és gràfic si i només si no té cap menor isomorf a $U_{2,4}$, F_7 , F_7^* , $M(K_5)^*$ ni a $M(K_{3,3})^*$.*

Més en concret, utilitzant el resultat clàssic de Wagner sobre la caracterització dels grafs planars, podem obtenir la següent caracterització.

Corol·lari 3.4.26. *Un matroide es pot representar amb un graf planar si no té cap menor isomorf a $U_{2,4}$, F_7 , F_7^* , $M(K_5)^*$, $M(K_{3,3})^*$, $M(K_5)$ ni a $M(K_{3,3})$.*

Els resultats anteriors també ens permeten veure certs aspectes de l'operació de dual en els matroides gràfics.

Definició 3.4.27. Un matroide M és *cogràfic* si M^* és gràfic.

Corol·lari 3.4.28. *Si matroide M es pot representar amb un gràfic planar, llavors M és cogràfic.*

Corol·lari 3.4.29. *Si un matroide M és gràfic, llavors M^* és representable.*

A continuació donarem un resultat més precís que el del corol·lari 3.4.28.

Proposició 3.4.30. *El dual d'un matroide gràfic planar és també un matroide gràfic planar. A més a més, si G_1 és un graf planar i G_2 el seu graf dual, llavors $M(G_1)^* = M(G_2)$.*

Demostració. Recordem breument que el dual d'un graf planar G és un graf on els vèrtexs estan identificats amb les cares de G , i que cada aresta de G s'identifica amb una aresta de G^* que uneix els vèrtexs de dues cares separades. En la figura 11 es mostra un graf de color negre, i en vermell el seu dual.

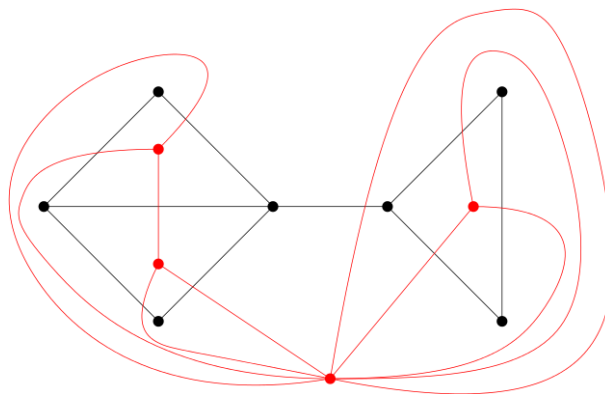


Figura 11: Graf planar i el seu dual

Per a demostrar-ho, només fa falta veure, per exemple, que si X és un circuit de $M(G)$, llavors $E - X$ és un hiperplà de $M(G^*)$. Per 3.4.20, suposarem que G és connex. G^* també és connex perquè l'operació dual en grafs sempre dona un graf connex. Si X és un circuit, separa les cares d'un graf en dos conjunts, les que es troben dintre i les que es troben a fora. Això vol dir que en el graf G^* , les arestes identificades per X són aquelles que uneixen vèrtexs de les cares interiors amb vèrtexs de les exteriors. Per tant, el graf induït per $E - X$ és un graf amb dos components connexos. Pel lema 3.4.23 el rang d'aquest és $|V(G)| - 2$, i si afegim qualsevol aresta de X , passa a ser connex, i per tant el rang seria $|V(G)| - 1$. Aquesta propietat implica que $E - X$ és un hiperplà de $M(G^*)$. \square

En l'exemple de la figura 11 podem observar com el cicle de tres elements del graf negre que es troba a la dreta separa una cara de la resta. Les arestes identificades amb aquest cicle en el dual són les que uneixen un vèrtex amb els altres. Per tant, el conjunt de la resta d'arestes vermelles són un hiperplà. Per altra banda, l'aresta pont del graf en negre, que ha d'aparèixer en totes les bases, és un llaç en el seu dual.

4. Matroides i el teorema dels menors

Recordem que en la introducció es menciona la conjectura de Rota, que diu que els matroides \mathbb{F} -representables, amb \mathbb{F} finit, tenen un nombre finit de menors exclosos. Començarem veient que a diferència del que havíem vist en els grafs, no en totes les classes de matroides tancats per la relació de menor hi ha relació entre estar quasi ben ordenats i tenir un nombre finit de menors exclosos. Mostrarem casos on es compleixen les dues, on només es compleix una o on no es compleix ninguna de les dues coses.

Posteriorment parlarem del teorema 1.0.2 i de per què aquest és similar al teorema de Robertson i Seymour però en matroides.

4.1 Matroides quasi ben ordenats i amb nombre finit de menors exclosos

Els matroides binaris, ternaris, gràfics i qualsevol subfamília d'aquests són exemples de famílies que compleixen aquestes dues propietats. Aquest resultat però no són evidents. Per això mostrarem un exemple més trivial.

Proposició 4.1.1. *Sigui $\{U_{n,n}\}_{n \geq 0}$ el conjunt de matroides on tots els subconjunts de E són independents. L'únic menor exclòs és $U_{0,1}$, el matroide amb un únic element, i aquest és dependent. També és compleix que $\{U_{n,n}\}_{n \geq 0}$ està quasi ben ordenat.*

Demostració. Òbviament $U_{0,1} \notin \{U_{n,n}\}_{n \geq 0}$. Per altra banda, si M és un matroide tal que $M \notin \{U_{n,n}\}_{n \geq 0}$, vol dir que té com a mínim un circuit $C = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Llavors si a M suprimim tots els elements de $E \setminus C$ i contraïem tots els elements de $C \setminus e_1$, obtenim un menor isomorf a $U_{0,1}$.

Com que $U_{i,i} \preceq U_{j,j}$ si $i \leq j$, i no existeix una successió de nombres naturals estrictament decreixent, totes les seqüències són bones, per tant estan quasi ben ordenats. \square

4.2 Matroides quasi ben ordenats i amb infinits menors exclosos

Aquest apartat es basa en l'article *The Lattice of Cyclic Flats of a Matroid* (Bonin; de Mier, 2008) [1].

Definició 4.2.1. En un matroide M , un flat és *cíclic* si és unió de cicles (també pot ser buit).

Definició 4.2.2. Un matroide M l'anomenarem *nested* si és un matroide on els seus flats cíclics formen una cadena. És a dir, si Z_1, Z_2, \dots, Z_n són els flats cíclics, llavors $cl(\emptyset) = Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_n$.

Els matroides nested són quasi ben ordenats, però la seva família de menors exclosos és infinita. Encara que no es farà una demostració estricta de per què estan quasi ben ordenats, es donarà una idea del motiu.

Per a construir un matroide nested, fan falta només dues operacions, afegir punts o una extensió lliure.

Definició 4.2.3. En un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ amb el conjunt de bases \mathcal{B} , l'operació *afegir un pont* és la d'afegir un element que és independent amb tots els altres. Equivalentment, si e és el nou element, el matroide M' resultant d'afegir com a pont e a M té com a bases $\mathcal{B}' = \{B \cup e : B \in \mathcal{B}\}$.

Definició 4.2.4. En un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ amb el conjunt de bases \mathcal{B} , l'operació *extensió lliure* és la d'afegir un element creant les mínimes dependències possibles, sense augmentar el rang. Si e és el element afegit per aquesta operació, les bases del nou matroide seràn $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{A \cup e : A \in \mathcal{I} \text{ i } r(A) = r(M) - 1\}$

Es pot comprovar fàcilment que les dues operacions donen com a resultat un altre matroide.

Lema 4.2.5. *Afegir un pont o fer una extensió lliure a un matroide nested dóna com a resultat un altre matroide nested.*

Demostració. En el cas dels ponts és trivial, ja que al afegir un element independent a tots els anteriors manté els mateixos circuits, i per tant manté també els mateixos flats cíclics.

Per altra banda, els elements lliures, al ser afegits, no poden generar un flat nou, encara que sí és possible que generin un nou flat cíclic d'un flat que no era cíclic anteriorment. Però com que el flat cíclic que pot generar només pot ser de dimensió màxima per com està definit, qualsevol flat cíclic anterior ha d'estar contingut en aquest. Per tant, també es un matroide nested.

□

Lema 4.2.6. *Un matroide nested és isomorf a un altre obtingut només amb les operacions d'afegir ponts i extensions lliures a partir del matroide buit.*

Aquest resultat, encara que no serà demostrat, és important per a veure que els matroides nested estan quasi ben ordenats. La idea de la demostració es basa en identificar cada matroide nested amb una cadena ordenada de ponts i extensions lliures. D'aquestes cadenes, direm que $x \leq y$, amb $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ i $y = y_1, y_2, \dots, y_n$ si existeixen $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ tals que $x_j \leq y_{i_j}$ per a $1 \leq j \leq m$. En aquesta relació, considerarem un pont i una extensió lliure incomparables. És fàcil veure que aquestes cadenes estan quasi ben ordenades. Siguin $x \leq y$ dos cadenes, i M i N els matroides associats a aquestes. Es pot veure que els elements de N que no estan a M , si són extensions lliures es suprimeixen i si són afegits com a pont es contrauen, llavors s'obté un matroide isomorf a M .

Els matroides que contenen $2n$ elements, separats en dos circuits de n elements cadascun i on qualsevol conjunt de $n + 1$ elements és dependent, no són nested. També és cert que cap d'ells és menor d'un altre. De fet, són la família de menors exclosos dels nested, i és infinita. En la figura 12 es mostren representacions geomètriques pels casos on $n = 2, 3$ i 4 . Podem veure que els menors d'aquests són nested. Per exemple, si fem una supressió, el matroide resultant es pot obtenir fent les següents operacions: afegir $n - 1$ ponts, fer una extensió lliure, afegir un altre pont i fer $n - 2$ extensions lliures més. Per altra banda, si es realitza una contracció, s'obté un matroide isomorf seguint els següents passos: afegir $n - 2$ ponts, fer una extensió lliure, afegir un altre pont i fer $n - 1$ extensions lliures més.

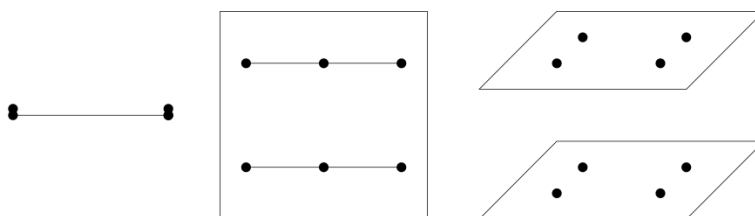


Figura 12: Exemples de menors exclosos pels nested

4.3 Matroides no quasi ben ordenats i amb un nombre finit de menors exclosos

Un exemple senzill que compleix aquesta propietat són els matroides que com a molt tenen rang 3. Clarament només tenen un menor exclòs, $U_{4,4}$, però podem provar que no estan quasi ben ordenats trobant una anticadena, és a dir, una cadena d'elements incomparables.

Proposició 4.3.1. Per a $i \geq 3$ sigui $P_i = (E_i, \mathcal{I}_i)$ el matroide de rang 3 on $E_i = \{1, 2, \dots, 2i\}$ i els únics circuits amb menys de 4 elements són $\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}, \dots, \{2i-1, 2i, 1\}$. Llavors la seqüència P_3, P_4, P_5, \dots és una anticadena.

La representació geomètrica per a certs valors de i , més fàcil d'entendre que la donada en la proposició, és la de la figura 13.

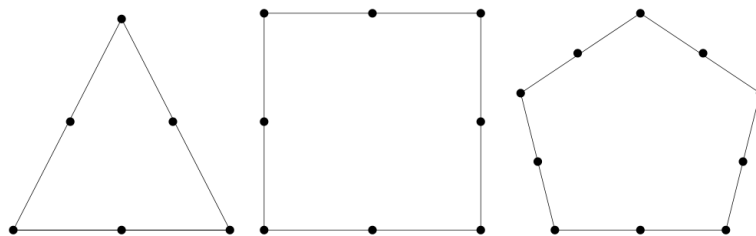


Figura 13: P_3, P_4 i P_5

Demostració. Comprovem que si $i < j$, llavors no es pot obtenir un matroide isomorf a P_i mitjançant contraccions i supressions a P_j . Si contraïem un element e , P_j/e té rang 2, però P_i té rang 3, per tant no és possible realitzar contraccions. Per altra banda, amb supressions només és possible eliminar cicles, no formar-ne de nous, que seria necessari per a obtenir P_i . Per tant, és impossible obtenir P_i només amb aquestes dues operacions. \square

4.4 Matroides no quasi ben ordenats i amb infinits menors exclosos

Una família de matroides que ni està quasi ben ordenada ni té un nombre infinit de menors exclosos és la dels representables sobre els reals. Una possible anticadena és la ja donada en la proposició 4.3.1. No donarem el llistat de tots els menors exclosos per a aquests matroides, però si en donarem una família de matroides infinita que està dintre dels menors exclosos.

Teorema 4.4.1. Sigui \mathbb{F} un cos amb característica 0. Per a qualsevol nombre primer p , sigui L_p el matroide representat per la matriu $[I_{p+1} | J'_{p+1}]$ sobre \mathbb{F}_p , on J'_{p+1} és la matriu amb zeros a la diagonal i uns en les altres posicions. Llavors L_p és un menor exclòs dels matroides \mathbb{F} -representables.

Aquest teorema s'ha extret de *What is a matroid?* (Oxley, 2014) [7].

4.5 El teorema dels menors

Gràcies a la proposició 3.3.13, podem dir que és equivalent que una seqüència de grafs estiguin quasi ben ordenats a que els seus matroides també ho estiguin, i viceversa. Per tant, el resultat clàssic de Robertson i Seymour aplicat a matroides és que qualsevol família de matroides gràfics tenen un nombre finit d'exclusos gràfics. El teorema 1.0.2 que Geelen, Gerards i Whittle afirmen haver demostrat és un resultat més general, ja que no només es pot aplicar a matroides gràfics, sinó que a qualsevol família de matroides \mathbb{F} -representables, on \mathbb{F} és finit.

La conjectura de Rota, encara que és un resultat similar, no és equivalent. Recordem que la conjectura de Rota diu que per a qualsevol cos finit \mathbb{F} , hi ha un nombre finit de menors exclusos pels matroides \mathbb{F} -representables. La conjectura de Rota no implica res sobre els menors \mathbb{F} -representables de les subfamílies, mentre que el teorema 1.0.2 no diu res sobre els menors que no són \mathbb{F} -representables.

Per a demostrar 1.0.2, en l'article *Solving Rota's Conjecture* (Geelen; Gerards; Whittle, 2014) [3] mencionen que feia falta un resultat estructural equivalent al de la demostració clàssica del teorema dels menors, el qual deia com es podien construir els grafs d'una classe tancada per menors a partir de grafs quasiimmersos en superfícies de gènere petit.

Mencionen que només hi ha dos classes fonamentals de matroides \mathbb{F} -representables: Els matroides \mathbb{F}' -representables, on \mathbb{F}' és un subcos de \mathbb{F} , i els matroides frame \mathbb{F} -representables, definits a continuació segons l'article *Frame Matroids and Biased Graphs* (Zaslavsky, 1994) [9].

Definició 4.5.1. Un *matroide frame* és qualsevol submatroide (matroide obtingut per supressions) d'un matroide M , on existeix una base B i on tots els elements de M estan generats per alguna parella d'elements de B .

Per tant, el teorema que demostren descriu per a qualsevol cos \mathbb{F} com es construeixen matroides d'una classe tancada per menors i \mathbb{F} -representables a partir de matroides representables en subcosos de \mathbb{F} , matroides frame i el dual d'aquestes.

5. Bibliografia

Referències

- [1] J.E. Bonin; A. de Mier. 'The Lattice of Cyclic Flats of a Matroid'. *Annals of Combinatorics*, volum 12 (número 2). 155-170. Basilea, 2008.
- [2] R. Diestel. 'Minors, Trees and WQO', *Graph Theory*. 3a edició. Berlín: Springer-Verlag, 2006.
- [3] J. Geelen; B. Gerards; G. Whittle. 'Solving Rota's Conjecture'. *Notice of the AMS*, volum 61 (número 7) 736-743.
- [4] G. Gordon; J. McNulty. *Matroids: A Geometric Introduction*. Cambridge University Press, 2012.
- [5] M. Noy, 'El gran teorema de la combinatòria moderna'. *Butlletí de la societat catalana de matemàtiques*, volum 26 (número 2) 103-136. Barcelona, 2011.
- [6] J.G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, 1992.
- [7] J.G. Oxley. *What is a matroid?* <https://www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf>.
- [8] N. Robertson; P. Seymour. 'Graphs Minors I-XX'. *Journal of Combinatorial Theory*. 1983-2004.
- [9] T. Zaslavsky. 'Frame Matroids and Biased Graphs'. *European Journal of Combinatorics*, volum 15 (número 13). 303-307.

A. Apèndix: Definicions per ordre alfabètic

Definició A.0.1. *Arbre:* Graf que no conté cap cicle.

Definició A.0.2. *Aresta pont:* En un graf $G = (V, E)$, direm que una aresta $e \in E$ és pont si al suprimir-la augmenta el nombre de components connexes.

Definició A.0.3. *Camí:* Conjunt de vèrtexs ordenats i tots diferents v_1, v_2, \dots, v_n tals que per a tot $i < n$, existeix l'aresta $v_i v_{i+1}$.

Definició A.0.4. *Característica d'Euler i gènere d'una superfície:* Prenem un recobriment d'una superfície en polígons tal que dos polígons només poden compartir una aresta, i si es així, només comparteixen els vèrtexs de tal aresta. Llavors la característica d'Euler de la superfície és $\chi = p + v - e$, on p és el nombre de polígons, v el de vèrtexs i e el d'arestes. El gènere g es pot definir com $g = \frac{2-\chi}{2}$, i és el nombre de "forats" de la superfície.

Definició A.0.5. *Cicle:* Camí on el primer i últim vèrtex coincideixen.

Definició A.0.6. *Graf:* Un graf és una parella (V, E) , on V és un conjunt d'elements que anomenarem vèrtexs i E és un conjunt de parelles d'elements de V , que anomenarem arestes. Per a dibuixar-los, els vèrtexs seràn punts i les arestes seràn arcs que uneixin els vèrtexs corresponents.

Definició A.0.7. *Graf connex:* Graf tal que entre qualsevol parella de vèrtexs existeix un camí.

Definició A.0.8. *Graf planar:* Graf tal que es pot representar en el plà sense creuament d'arestes.

Definició A.0.9. *Isomorfisme de grafs:* Direm que dos grafs $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ són isomorfs entre ells si podem definir una aplicació bijectiva $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $v_1 v_2 \in E_1$ si i només si $f(v_1)f(v_2) \in E_2$.

Definició A.0.10. *k-connex:* Un graf és k -connex si té almenys $k + 1$ vèrtexs, i qualsevol conjunt de $k - 1$ vèrtexs que suprimim no genera un graf no connex.

Definició A.0.11. *Subdivisió:* Si en un graf $G = (V, E)$ existeix una aresta uv , la subdivisió de uv es basa en afegir un vèrtex w a V , suprimir l'aresta uv i afegir les arestes uw i wv . Una subdivisió d'un graf $G = (V, E)$ és un graf que s'obté al realitzar successives subdivisions sobre qualsevol aresta.

Definició A.0.12. *Subgraf induït:* Graf que s'obté d'un altre graf, prenen un subconjunt de vèrtexs d'aquest i totes les arestes que connecten tals vèrtexs.